Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Томский государственный педагогический университет»
(ТГПУ)

В. А. Крыхтин

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ

Учебное пособие

Томск 2018

ББК 22.31 я 77
К85

Печатается по решению
учебно-методического совета
Томского государственного
пелагогического унивеситета

К85 Крыхтин В. А.
Гамильтоновы системы со связями: учебное пособие / В. А. Крыхтин. – Томск: Издательство ТГПУ, 2018. – 43 с.

ISBN 978-5-89428-862-8

Учебное пособие содержит базовый материал по курсу «Гамильтоновы системы со связями». В пособии даётся общая схема построения гамильтоновых формулировок для особенных теорий без высших производных с линейно независимыми связями. Приводится большое количество примеров, включая построение гамильтоновых формулировок для теорий электромагнитного поля, массивного поля спина 1 (поле Прока), поля Янга-Миллса и эйнштейновской гравитации.

Материал предназначен для студентов, специализирующихся по теоретической физике и рассчитан на первоначальное знакомство с предметом.

ББК 22.31 я 77

Рецензенты: профессор кафедры экспериментальной физики НИ ТПУ
доктор физико-математических наук
Ю. П. Кунашенко;

доцент отделения экспериментальной физики НИ ТПУ
кандидат физико-математических наук
Б. С. Мерзликин.

ISBN 978-5-89428-862-8

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие призвано помочь студентам, обучающимся по магистерской программе «Теоретическая физика» в освоении курса «Гамильтоновы системы со связями». Основная цель данного учебного пособия — познакомить студентов с методом построения гамильтоновых формулировок для особенных теорий без высших производных с линейно независимыми связями. Важность изучения этой темы связана с тем, что все фундаментальные теории, являются калибровочными (т.е. особенными) теориями и последовательное построение квантовой теории невозможно без построения гамильтоновой формулировки теории. В пособии содержится много примеров построения гамильтоновых формулировок особенных теорий, включая теорию электромагнитного поля, массивного поля спина 1 (поле Прока), поля Янга-Миллса и эйнштейновской гравитации. Материал носит учебный характер и предназначен для первоначального изучения предмета. По этой причине формальные рассуждения даются на физическом уровне строгости, вычисления проводятся со всеми деталями с рассмотрением примеров. В пособии сохранен свободный лекционный стиль изложения. Материал является внутренне замкнутым. Приведен небольшой список литературы для дальнейшего, более глубокого изучения, обсуждаемых здесь вопросов.

Глава 1. Гамильтонов формализм для неособенных теорий

Рассмотрим классическую систему, которая описывается обобщёнными координатами q^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что лагранжиан L этой системы зависит только от координат q^i и первых производных по времени $\dot{q}^i = \dfrac{dq}{dt}$

$$S = \int L(q^i, \dot{q}^i)dt. \tag{1.1}$$

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа), следующие из действия (1.1), имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0. \tag{1.2}$$

Так как, по предположению, лагранжиан зависит от координат q^i и первых производных по времени $\dot{q}^i$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{d}{dt}q^j + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{d}{dt}\dot{q}^j = \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j \end{aligned} \tag{1.3}$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Таким образом, уравнения движения (1.2), следующие из действия (1.1) будут дифференциальными уравнениями второго порядка

$$M_{ij}(q, \dot{q})\ddot{q}^j + V_i(q, \dot{q}) = 0, \tag{1.4}$$

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \qquad V_i = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}. \tag{1.5}$$

Если определитеь матрицы M_{ij} не равен нулю, то теория называется неособенной, в противном случае — особенной. В данном разделе мы будем рассматривать неособенные теории

$$\det M_{ij} \neq 0. \tag{1.6}$$

В этом случае уравнения движения (1.4) могут быть разрешены относительно старших производных $\ddot{q}^i = f^i(q, \dot{q})$ и, как следствие, оказывается применимой теорема о существовании и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что задача Коши имеет единственное решение при произвольных начальных данных $q^i(t_0)$ и $\dot{q}^i(t_0)$.

Второе следствие невырожденности матрицы M_{ij} (1.6) состоит в том, что в этом случае может быть построена гамильтонова формулировка теории.

Гамильтонова формулировка строится следующим образом. Сначала перейдём к системе дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентных уравнениям второго порядка (1.2)

$$\dot{q}^i = v^i, \qquad \frac{\partial L_v}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_v}{\partial v^i}, \tag{1.7}$$

$$\text{где} \qquad L_v(q, v) = L(q, \dot{q})\,\Big|_{\dot{q}^i \to v^i} \tag{1.8}$$

Теперь, для того чтобы записать дифференциальные уравнения первого порядка в виде разрешённом относительно производых, сделаем замену переменных $v^i \to p_i$. Для этого определим новую переменную p_i, называемую обобщённым импульсом, согласно равенству

$$p_i = \frac{\partial L_v}{\partial v^i} \tag{1.9}$$

и выразим из этого равенства все скорости v^i через координаты q^i и обобщённые импульсы p_i: $v^i = f^i(q, p)$. Такая замена переменных возможна в силу невырожденности матрицы M_{ij} (1.6).

После этих преобразований уравнения движения системы примут вид

$$\dot{q}^i = f^i(q, p), \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L_v}{\partial q^i}\Big|_{v^i \to f^i(q,p)}. \tag{1.10}$$

Уравнения движения (1.10) могут быть получены путём вариации действия

$$S[q^i, p_i] \;=\; \int \Big(p_i \dot{q}^i - H(q, p)\Big) dt, \tag{1.11}$$

где $H(q,p)$ называется гамильтонианом и строится следующим образом

$$H(q,p) \;=\; \Big(p_i v^i - L_v(q,v)\Big)\Big|_{v^i \to f^i(q,p)}. \tag{1.12}$$

Уравнения движения (1.10) записываются через гамильтониан в виде

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.13}$$

и называются уравнения Гамильтона или каноническими уравнениями.

Рассмотрим изменение со временем некоторой физической величины, задаваемой функцией $A(q,p,t)$

$$\frac{dA}{dt} \;=\; \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\;.$$

Подставив сюда вместо $\dot{q}^i$ и $\dot{p}_i$ их выражения из уравнений движения (1.13), получим

$$\frac{dA}{dt} \;=\; \frac{\partial A}{\partial t} + \big\{A,H\big\}, \tag{1.14}$$

где введено обозначение

$$\big\{A,H\big\} \;=\; \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\;. \tag{1.15}$$

Выражение (1.15) называется скобкой Пуассона для величин A и H. Уравнение (1.14) является уравнением движения для произвольной физической величины A. В частности, если вместо A взять координату q^i или обобщённый импульс p_i и подставить в (1.14), то мы получим уравнения Гамильтона (1.13).

Можно показать, что из определения (1.15) следуют свойства скобки Пуассона:

1. антисимметричность $\big\{A,B\big\} = -\big\{B,A\big\}$;

2. линейность по обоим аргументам

$$\begin{aligned}&\big\{\alpha A + \beta B, C\big\} = \alpha\big\{A,C\big\} + \beta\big\{B,C\big\}\\ &\big\{A, \beta B + \gamma C\big\} = \beta\big\{A,B\big\} + \gamma\big\{A,C\big\}\\ &\alpha,\beta,\gamma \text{ константы;}\end{aligned}$$

3. правило Лейбница

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\};$$

4. тождество Якоби

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

В заключение данного раздела приведём пример построения гамильтонова формализма для частицы массы m движущейся в потенциальном поле, чья потенциальная энергия — $U(\mathbf{r})$. Как известно, в нерелятивистской механике функция Лагранжа есть разность кинетической и потенциальной энергии системы

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}). \tag{1.16}$$

Связь между импульсами системы и скоростями найдём из соотношения (1.9) $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Выразим отсюда скорости $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m$ и, используя соотношение (1.12), найдём гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{r}). \tag{1.17}$$

Уравнения Гамильтона для рассматриваемой системы имеют вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}/m, \qquad \dot{p}_i = -\partial U(\mathbf{r})/\partial x^i. \tag{1.18}$$

Эти уранения можно записать с помощью скобки Пуассона

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}\ , \tag{1.19}$$

$$\{A, H\} = \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i}\ . \tag{1.20}$$

Теперь перейдём к рассмотрению особенных теорий.

Контрольные вопросы

1. Какая теория называется неособенной?

2. Какая теория является особенной?

3. Покажите, что уравнения движения (1.10) могут быть получены путём вариации действия (1.11).

4. Докажите правило Лебница для скобки Пуассона.

5. Докажите тождество Якоби для скобки Пуассона.

Глава 2. Гамильтонов формализм для особенных теорий

В этом разделе мы рассмотрим построение гамильтонова формализма для особенных теорий. У особенных теорий матрица M_{ij} вырождена

$$\det M_{ij} = 0 \tag{2.1}$$

и поэтому замена переменных $v^i \to p_i$ невозможна, и, как следствие, невозможен переход от системы уравнений (1.7) к системе уравнений (1.10). Также следствием вырожденности матрицы M_{ij} является то, что нельзя задавать независимо начальные данные для $q^i(t_0)$ и $\dot{q}^i(t_0)$, так как на эти величины появляются связи. Ещё одна особенность вырожденных теорий заключается в том, что задача Коши может не иметь единственного решения.

В этом случае поступим следующим образом. Перейдём от системы (1.7) к эквивалентной системе уравнений

$$\dot{q}^i = v^i, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L_v}{\partial q^i}, \qquad p_i = \frac{\partial L_v}{\partial v^i}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что если во второе уравнение подставить вместо p_i его выражение из третьего уравнения, то мы получим уравнения (1.7). Уравнения (2.2) могут быть получены из действия

$$S[q^i, v^i, p_i] \;=\; \int \Big(p_i(\dot{q}^i - v^i) + L_v(q, v) \Big) dt. \tag{2.3}$$

Система уравнений (2.2) и действие (2.3) называется расширенной гамильтоновой системой.

Пусть ранг матрицы M_{ij} равен $n - m$

$$\operatorname{rank} M_{ij} = n - m < n, \tag{2.4}$$

тогда из третьего уравнения (2.2) можно выразить $n - m$ скоростей и подставить их в оставшиеся уравнения движения (2.2) и в действие (2.3). Такая подстановка уравнений движения в действие законна, так как эти уравнения являются алгебраическими (то есть не содержат производных по времени). Оставшиеся скорости, которые мы не можем выразить через координаты q^i и импульсы p_i, обозначим λ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Эти скорости входят в действие (2.3) линейно[1], так как в противном случае ранг матрицы M_{ij} (2.4) был бы больше. В результате действие (2.3) примет вид

$$S[q^i, p_i, \lambda^\alpha] \;=\; \int \Big(p_i \dot{q}^i - H_0(q,p) - \lambda^\alpha \varphi^{(1)}_\alpha(q,p) \Big) dt. \qquad (2.5)$$

Заметим, что варьируя действие по λ^α мы получим уравнения движения $\varphi^{(1)}_\alpha(q,p) = 0$, которые не содержат производных по времени от координат и импульсов и являются ограничениями на возможные значения координат и импульсов, в том и числе и в начальный момент времени. Такие функции мы будем называть связями в гамильтоновом формализме. В данном случае, более точно, функции $\varphi^{(1)}_\alpha(q,p)$ называются первичными связями или связями первого этапа. Величина H_0 называется гамильтонианом, $H = H_0 + \lambda^\alpha \varphi_\alpha$ — полным гамильтонианом (здесь индекс $^{(1)}$ намеренно опущен, т.к. здесь под φ подразумеваются все связи теории, см. далее), λ^α — множители Лагранжа.

Используя скобку Пуассона (1.15), уравнения движения следующие из действия (2.5) записываются в виде

$$\dot{q}^i = \big\{ q^i, H_0 \big\} + \lambda^\alpha \big\{ q^i, \varphi^{(1)}_\alpha \big\}, \qquad (2.6)$$

$$\dot{p}_i = \big\{ p_i, H_0 \big\} + \lambda^\alpha \big\{ p_i, \varphi^{(1)}_\alpha \big\}, \qquad (2.7)$$

$$\varphi^{(1)}_\alpha(q,p) = 0. \qquad (2.8)$$

Введём следующие обозначения. Будем писать $A(q,p) \approx B(q,p)$, если величины A и B равны при условии выполнения связей (2.8), $A(q,p) = B(q,p) + a^\alpha(q,p)\varphi_\alpha(q,p)$, где $a^\alpha(q,p)$ — некоторые функции. Аналогично, будем писать $A \not\approx B$, если величины A и B не равны

[1] Не входить в действие (2.3) они не могут, так как, по крайней мере, эти скорости входят в слагаемое $-p_i v^i$.

при условии выполнения связей (2.8), то есть не существует таких функций $a^{\alpha}(q,p)$, чтобы равенство $A = B + a^{\alpha}\varphi_{\alpha}$ выполнялось.

Уравнения связей (2.8) должны выполняться в каждый момент времени, поэтому их производная по времени, с учётом (2.6) и (2.7), равна нулю

$$\dot{\varphi}^{(1)}_{\beta} = \{\varphi^{(1)}_{\beta}, H_0\} + \{\varphi^{(1)}_{\beta}, \varphi^{(1)}_{\alpha}\}\lambda^{\alpha} \approx 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим следствия соотношения (2.9). Если

$$\det\{\varphi^{(1)}_{\beta}, \varphi^{(1)}_{\alpha}\} \not\approx 0, \tag{2.10}$$

то существует обратная матрица $C^{\alpha\beta}(q,p)$, такая, что $C^{\alpha\beta}\{\varphi^{(1)}_{\beta}, \varphi^{(1)}_{\gamma}\} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$ и из соотношения (2.9) мы можем найти все множители Лагранжа

$$\lambda^{\alpha} = -C^{\alpha\beta}\{\varphi^{(1)}_{\beta}, H_0\}. \tag{2.11}$$

Если условие (2.10) не выполняется, то

$$\text{rank}\ \{\varphi^{(1)}_{\beta}, \varphi^{(1)}_{\alpha}\} \approx n_1 < m \tag{2.12}$$

и мы можем найти только n_1 множителей Лагранжа, как функции q^i и p_i. Подстановка найденных множителей Лагранжа в уравнения (2.9) может привести либо к тождественному выполнению этих уравнений, либо к появлению новых ограничений $\varphi^{(2)}_{a}(q,p) = 0$ на координаты и импульсы, которые называются связями второго этапа. В первом случае теория является непротиворечивой и дальнейших действий не требуетя. Оставшиеся неопределённые $m - n_1$ множителей Лагранжа так и остаются произвольными. В этом случае задача Коши не имеет единственного решения в силу произвольности множителей Лагранжа. Во втором случае нужно добавить связи $\varphi^{(2)}_{a}$ в действие (2.5) со своими множителями Лагранжа и повторить вышеописанную процедуру.

Такая процедура повторяется до тех пор пока либо не найдутся все множители Лагранжа, либо мы не получим новых ограничений на координаты и импульсы. Связи, получаемые на втором, третьем, четвёртом и т.д. этапах называются соответственно связями второго, третьего, четвёртого и т.д. этапов и которые все вместе называются называются вторичными связями.

Обозначим все связи (первичные и вторичные) через Φ_A. Тогда действие в гамильтоновой форме примет окончательный вид

$$S[q^i, p_i, \lambda^A] = \int \Big(p_i \dot{q}^i - H_0(q,p) - \lambda^A \Phi_A(q,p)\Big) dt. \tag{2.13}$$

Введём следующую терминологию. Функция $A(q,p)$ называется величиной первого рода, если её скобки Пуассона со всеми Φ_A пропорциональны связям

$$\big\{A(q,p), \Phi_A(q,p)\big\} \approx 0. \tag{2.14}$$

В противном случае функция $A(q,p)$ относится к величинам второго рода. Согласно этому определению все связи Φ_A можно разделить на связи первого T_α и второго рода χ_a, независимо от их разделения на первичные и вторичные

$$\Phi_A = (T_\alpha, \chi_a) \qquad \{T_\alpha, \Phi_A\} = U^B_{\alpha A} \Phi_B\,. \tag{2.15}$$

Заметим также, что

$$\{T_\alpha, H_0\} = V^A_\alpha \Phi_A\,. \tag{2.16}$$

Если бы это было не так, то это бы означало, что процедура нахождения всех связей ещё не завершена и надо добавить к связям Φ_A ещё связи, генерируемые $\{T_\alpha, H_0\}$. Заметим, что в общем случае величины $U^B_{\alpha A}$ и V^A_α являются функциями фазовых переменных.

Используя тождество Якоби можно показать, что скобка Пуассона двух величин первого рода является величиной первого рода. Действительно, пусть A и B две величины первого рода

$$\{A, \Phi_A\} = f^B_{1A} \Phi_B\,, \qquad \{B, \Phi_A\} = f^B_{2A} \Phi_B\,. \tag{2.17}$$

Тогда для их скобки Пуассона имеем

$$\begin{aligned}\{\{A,B\},\Phi_A\} &= \{A,\{B,\Phi_A\}\} + \{\{A,\Phi_A\},B\} = \\ &= \{A, f^B_{2A}\Phi_B\} + \{f^B_{1A}\Phi_B, B\} = \\ &= \{A, f^B_{2A}\}\Phi_B + f^B_{2A}\{A,\Phi_B\} + \\ &\quad + \{f^B_{1A}, B\}\Phi_B + f^B_{1A}\{\Phi_B, B\} \approx 0\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Перейдём к более детальному рассмотрению теорий со связями первого и второго рода. Начнём с теорий со связями второго рода.

Контрольные вопросы

1. Какие связи называются связями первого этапа?
2. Какие связи называются первичными?
3. Какие связи называются вторичными?
4. Какие связи называятся связями первого рода?
5. Какие связи называятся связями второго рода?
6. Является ли гамильтониан величиной первого рода?

Глава 3. Теории со связями второго рода

Теориями со связями второго рода называют теории все связи которой Φ_A — связи второго рода. Это значит, что определитель матрицы, составленной из скобок Пуассона полной системы связей $\|\{\Phi_A, \Phi_B\}\|$, не равен нулю

$$\det \|\{\Phi_A, \Phi_B\}\| \not\approx 0, \tag{3.1}$$

где $\not\approx$ обозначает «не равно, на поверхности связей $\Phi_A = 0$». Аналогично, $\approx$ будет обозначать «равно, на поверхности связей $\Phi_A = 0$». Заметим, что так как матрица $\|\{\Phi_A, \Phi_B\}\|$ антисимметрична и её определитель отличен от нуля, то количество связей второго рода всегда чётное.

Изучим теории со связями второго рода более детально. Запишем действие в гамильтоновой форме (2.13)

$$S = \int \Big(p_i \dot{q}^i - H_0(q,p) - \lambda^A \Phi_A(q,p)\Big) dt, \tag{3.2}$$

где индекс i пробегает значения от 1 до n, а индекс A от 1 до m_2.

Уравнения движения, следующие из действия (3.2) имеют вид

$$\dot{q}^i = \big\{q^i, H_0\big\} + \lambda^A \big\{q^i, \Phi_A\big\}, \tag{3.3}$$

$$\dot{p}_i = \big\{p_i, H_0\big\} + \lambda^A \big\{p_i, \Phi_A\big\}, \tag{3.4}$$

$$\Phi_A(q,p) = 0. \tag{3.5}$$

Уравнение движения для произвольной величины $A(q,p)$, явно не зависящей от времени (в том числе для координат q^i и импульсов p_i), также можно записать с использованием скобки Пуассона

$$\dot{A} = \big\{A, H_0\big\} + \lambda^A \big\{A, \Phi_A\big\}. \tag{3.6}$$

Из условия сохранения связей во времени $\dot{\Phi}_A \approx 0$

$$\dot{\Phi}_B \ = \ \big\{\Phi_B, H_0\big\} + \big\{\Phi_B, \Phi_C\big\}\lambda^C \approx 0 \tag{3.7}$$

найдём лагранжевы множители λ^A. Так как определитель матрицы $\|\{\Phi_A, \Phi_B\}\|$ не равен нулю (3.1), то эта матрица имеет обратную. Обозначим обратную матрицу $C^{AB}(q,p)$, $C^{AB}\{\Phi_B, \Phi_C\} = \delta^A_C$ и умножим на неё равенство (3.7). В результате получим

$$\lambda^A \approx -C^{AB}\big\{\Phi_B, H_0\big\} \tag{3.8}$$

и, следовательно, мы можем определить все множители Лагранжа. Подставим найденные множители Лагранжа (3.8) в уравнения движения (3.6)

$$\dot{A} \ \approx \ \big\{A, H_0\big\} - \big\{A, \Phi_A\big\}C^{AB}\big\{\Phi_B, H_0\big\}. \tag{3.9}$$

Таким образом, в теориях со связями второго рода будет отсутствовать функциональный произвол в решении уравнений движения и решение системы будет определяться только начальными данными.

Уравнения (3.9) также можно записать в следующем компактном виде

$$\dot{A} \ = \ \big\{A, H_0\big\}_D, \qquad \Phi_A = 0, \tag{3.10}$$

где введена скобка Дирака

$$\big\{A, B\big\}_D = \big\{A, B\big\} - \big\{A, \Phi_A\big\}C^{AB}\big\{\Phi_B, B\big\}. \tag{3.11}$$

Скобка Дирака используется для построения квантовой теории.

Помимо свойств скобки Пуассона, перечисленных на стр. 7, скобка Дирака обладает дополнительными свойствами. В частности, скобка Дирака связи второго рода Φ_A с любой величиной A равна нулю

$$\big\{\Phi_A, A\big\}_D = \big\{\Phi_A, A\big\} - \big\{\Phi_A, \Phi_B\big\}C^{BC}\big\{\Phi_C, A\big\} \equiv 0. \tag{3.12}$$

Это означает, что в уравнениях движения, записанных с помощью скобки Дирака, связи второго рода можно полагать равными нулю до вычисления скобки Дирака.

Ещё одно свойство скобки Дирака связано с изменением набора связей. Если Φ_A и Ψ_A — два набора эквивалентных связей, определяющих одну и туже поверхность в фазовом пространстве (q^i, p_j), то скобки Дирака, построенные по этим наборам связей, совпадают на поверхности связей

$$\big\{A, B\big\}_{D(\Phi)} \approx \big\{A, B\big\}_{D(\Psi)}. \tag{3.13}$$

Остальные свойства скобки Дирака можно найти, например, в книге [1].

Уравнения связей $\Phi_A(q,p) = 0$ выделяют в $2n$-мерном фазовом пространстве канонических переменных q и p $(2n - m_2)$-мерную поверхность. Мы можем ввести на этой поверхности $n - m_2/2$ пар канонических координат ξ^a и импульсов π_a. Для этой цели достаточно решить m_2 уравнений связей $\Phi_A(q,p) = 0$ в терминах ξ^a и π_a

$$\begin{aligned} &q^i = q^i(\xi, \pi), \qquad p_i = p_i(\xi, \pi), \\ &\Phi_A(q^i(\xi,\pi), p_i(\xi,\pi)) \equiv 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Зная динамику ξ^a и π_a мы можем восстановить динамику q^i и p_i. Пространство переменных ξ^a и π_a называется физическим фазовым пространством или редуцированным фазовым пространством, а сами переменные ξ^a и π_a — физическими переменными. Количество физических степеней свободы (т.е. количество пар канонически сопряжённых физических переменных ξ^a и π_a) в теориях со связями второго рода определяется как

$$n_{\text{ф}} = n - m_2/2\,, \tag{3.15}$$

где $n_{\text{ф}}$ — количество физических степеней свободы, n — полное количество пар канонических переменных q_i и p_i, m_2 — количество связей второго рода.

Динамические уравнения для физических переменных можно получить при помощи подстановки (3.14) в уравнения движения (3.10).

Эти уравнения могут быть получены из действия

$$
\begin{aligned}
S[\xi,\pi] \;&=\; \int\Big(p_i(\xi,\pi)\dot{q}^i(\xi,\pi) - H_0(q(\xi,\pi),p(\xi,\pi))\Big)dt \\
&=\; \int\Big(\pi_a\dot{\xi}^a - H_\text{ф}(\xi,\pi)\Big)dt, \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

где $H_\text{ф}$ — физический гамильтониан, а равенство (3.16) — является равенством для его определения.

Заметим, что скобка Дирака равна скобке Пуассона в физических переменных ξ_a и π^a

$$
\{A,B\}_D = \{A,B\}_{\xi,\pi} = \frac{\partial A}{\partial\xi_a}\frac{\partial B}{\partial\pi^a} - \frac{\partial A}{\partial\pi^a}\frac{\partial B}{\partial\xi_a}\,. \qquad (3.17)
$$

В этих обозначениях уравнения движения для системы со связями второго рода запишутся для физических переменных в виде

$$
\dot{\xi}^a = \{\xi^a, H_\text{ф}\}_{\xi,\pi}\,, \qquad\qquad \dot{\pi}_a = \{\pi_a, H_\text{ф}\}_{\xi,\pi}\,. \qquad (3.18)
$$

Поясним всё сказанное выше на примере. Рассмотрим следующее действие

$$
S \;=\; \int\Big(\frac{m(\dot{x}+\dot{y})^2}{2} - \frac{k_1x^2}{2} - \frac{k_2y^2}{2}\Big)\,dt\,. \qquad (3.19)
$$

Определитель матрицы M_{ij} для этой теории равен нулю

$$
\det\begin{Vmatrix}\frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}} & \frac{\partial^2L}{\partial\dot{x}\partial\dot{y}} \\ \frac{\partial^2L}{\partial\dot{y}\partial\dot{x}} & \frac{\partial^2L}{\partial\dot{y}\partial\dot{y}}\end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{Vmatrix} = 0, \qquad (3.20)
$$

следовательно, теория является особенной. Действие расширенной гамильтоновой системы (2.3) для теории (3.19) имеет вид

$$
S_v = \int\Big(p_x(\dot{x}-v_x)+p_y(\dot{y}-v_y)+\frac{m(v_x+v_y)^2}{2}-\frac{k_1x^2}{2}-\frac{k_2y^2}{2}\Big)\,dt\,. \quad (3.21)
$$

Найдём алгебраические уравнения, связывающие импульсы и скорости,

$$
\frac{\partial L_v}{\partial v_x} = -p_x + m(v_x+v_y) = 0, \qquad (3.22)
$$

$$
\frac{\partial L_v}{\partial v_y} = -p_y + m(v_x+v_y) = 0\,. \qquad (3.23)
$$

Из этих уравнений видно, что мы не можем одновременно выразить скорости v_x и v_y через импульсы p_x и p_y, одна из этих скоростей остаётся произвольной и она будет играть роль множителя Лагранжа. Возьмём в качестве лагранжева множителя скорость v_y, а скорость v_x выразим через импульсы

$$v_y = \lambda, \qquad v_x = \frac{p_x}{m} - \lambda \tag{3.24}$$

и подставим их в действие (3.21). В результате получим действие теории в гамильтоновой форме (2.5)

$$\begin{aligned} S_H \;&=\; \int \Big(p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - H_0 - \lambda T_1 \Big)\, dt \;, &(3.25)\\ &H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} \;, &(3.26)\\ &T_1 = p_y - p_x \;, &(3.27)\end{aligned}$$

где H_0 является гамильтонианом, а T_1 — первичной связью.

Сохранение во времени связи первого этапа приводит к связи T_2 второго этапа

$$\dot{T}_1 \;=\; \dot{p}_y - \dot{p}_x = k_1 x - k_2 y \equiv T_2 \;. \tag{3.28}$$

Согласно описанной выше процедуре, мы добавим полученную вторичную связь (3.28) в действие (3.25) со своим лагранжевым множителем

$$\begin{aligned} S_H \;&=\; \int \Big(p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - H_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 \Big)\, dt \;, &(3.29)\\ &H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} \;,\\ &T_1 = p_y - p_x \;,\\ &T_2 = k_1 x - k_2 y \;.\end{aligned}$$

Уравнения движения, следующие из действия (3.29), имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{p_x}{m} - \lambda_1, && \dot{y} = \lambda_1, &(3.30)\\ &\dot{p}_x = -k_1 (x + \lambda_2), && \dot{p}_y = k_2 (\lambda_2 - y), &(3.31)\\ &p_y - p_x = 0, && k_1 x - k_2 y = 0. &(3.32)\end{aligned}$$

Уравнения (3.30), (3.31) можно записать с использованием скобки Пуассона

$$\{A,B\} \;=\; \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p_x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial p_y}-\frac{\partial A}{\partial p_x}\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial p_y}\frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{x}=\{x,H_0\}+\lambda_i\{x,T_i\} & \dot{p}_x=\{p_x,H_0\}+\lambda_i\{p_x,T_i\} \\ \dot{y}=\{y,H_0\}+\lambda_i\{y,T_i\} & \dot{p}_y=\{p_y,H_0\}+\lambda_i\{p_y,T_i\} \end{array}$$

где по $i=1,2$ подразумевается суммирование.

Сохранение связей T_1 и T_2 во времени не приводит к появлению новых связей, а позволяет определить множители Лагранжа

$$\begin{array}{rl} \dot{T}_i \;= & \{T_i,H_0\}+\{T_i,T_j\}\lambda_j=0, \\ i=1 \qquad & k_1x-k_2y+(k_1+k_2)\lambda_2=0, \\ i=2 \qquad & \dfrac{k_1p_x}{m}-(k_1+k_2)\lambda_1=0, \\ \Rightarrow \qquad & \lambda_1=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\,\dfrac{p_x}{m}, \qquad \lambda_2=\dfrac{k_2y-k_1x}{k_1+k_2}=0, \end{array}$$

где в последнем равенстве использована связь $k_2y-k_1x=0$. После подстановки лагранжевых множителей в уравнения (3.30) и (3.31) получим уравнения

$$\begin{array}{ll} \dot{x}=\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\,\dfrac{p_x}{m}, & \dot{y}=\dfrac{k_1}{k_1+k_2}\,\dfrac{p_x}{m}, \\ \dot{p}_x=-k_1x, & \dot{p}_y=-k_2y. \end{array} \tag{3.33}$$

Как следствие, в данной теории в решении уравнений движения (3.33) будет отсутствовать функциональный произвол. Заметим также, что уравнения связей будут выполнятся во все моменты времени, если они выполняются в начальный момент времени и выполняются уравнения (3.33). Таким образом, мы построили гамильтонову формулировку для действия (3.19) нашли все связи теории T_1 и T_2. Скобка Пуассона этих связей не равна нулю $\{T_1,T_2\}=k_1+k_2\neq 0$, поэтому связи T_1 и T_2 — это связи второго рода.

Построим скобку Дирака. Для этого вычислим матрицу $\|\{T_i,T_j\}\|$ и ей обратную C^{ij}

$$\|\{T_i,T_j\}\|=(k_1+k_2)\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}, \qquad C^{ij}=\frac{1}{k_1+k_2}\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Как результат получаем выражение для скобки Дирака через скобку Пуассона

$$\{A,B\}_D = \{A,B\} + \\ + \frac{1}{k_1+k_2}\Big(\{A,T_1\}\{T_2,B\} - \{A,T_2\}\{T_1,B\}\Big).$$

Можно проверить, что уравнения движения (3.33) также могут быть записаны (с точностью до уравнений связей) с помощью скобки Дирака.

Сделаем каноническое преобразование и перейдём от переменных $(x, p_x; y, p_y)$ к переменным $(q, p; Q, P)$

$$q = x + y\,, \qquad p = \frac{k_2 p_x + k_1 p_y}{k_1+k_2}\,, \tag{3.34}$$

$$Q = \frac{k_2 y - k_1 x}{k_1+k_2}\,, \qquad P = p_y - p_x\,. \tag{3.35}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x = \frac{k_2\, q}{k_1+k_2} - Q\,, \qquad p_x = p - \frac{k_1\, P}{k_1+k_2}\,, \tag{3.36}$$

$$y = \frac{k_1\, q}{k_1+k_2} + Q\,, \qquad p_y = p + \frac{k_2\, P}{k_1+k_2}\,. \tag{3.37}$$

В новых переменных уравнения связей имеют вид $Q = 0$ и $P = 0$, а переменные q и p являются физическими. Таким образом, в рассматриваемом примере имеется только одна степень свободы.

Вычислим скобки Дирака для новых переменных и получим, что единственная отличная от нуля скобка — это

$$\{q,p\}_D = \{q,p\} = 1. \tag{3.38}$$

Теперь найдём гамильтониан H_0 в новых переменных

$$H_0 = \frac{1}{2m}\Big(p - \frac{k_1}{k_1+k_2}P\Big)^2 + \frac{k_1 k_2}{2(k_1+k_2)}q^2 + \frac{k_1+k_2}{2}Q^2 \tag{3.39}$$

Как результат физический гамильтониан, для рассматриваемого примера, имеет вид

$$H_\text{ф} = \frac{1}{2m}\,p^2 + \frac{k_1 k_1}{2(k_1+k_2)}\,q^2. \tag{3.40}$$

С учётом уравнений связей, уравнения движения для физических переменных

$$\dot{q} = \{q, H_\text{ф}\} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = \{p, H_\text{ф}\} = -\frac{k_1 k_2\, q}{k_1 + k_2} \tag{3.41}$$

могут быть получены из действия

$$S \;=\; \int \Big(p\dot{q} - H_\text{ф}\} \Big)\, dt\ . \tag{3.42}$$

Теперь перейдём к более детальному рассмотрению теорий со связями первого рода.

Контрольные вопросы

1. Какие теории называют теориями со связями второго рода?
2. Может ли количество связей второго рода быть нечётным?
3. Чему равна скобка Дирака любой величины со связью второго рода?
4. По какой формуле находится количество физических степеней свободы в теориях со связями второго рода?
5. Вычислите физический гамильтониан (3.40).

Глава 4. Теории со связями первого рода

Теории со связями первого рода это такие теории, в которых все связи Φ_A являются связями первого рода. Обозначим связи первого рода как $T_\mu(q,p)$ и запишем действие (2.13)

$$S \;=\; \int \Big(p_i \dot{q}^i - H_0(q,p) - \lambda^\mu T_\mu(q,p) \Big) dt, \tag{4.1}$$

где индекс i пробегает значения от 1 до n, а индекс μ от 1 до m_1.

Так как, по предположению, связи второго рода отсутствуют, то для связей T_μ и гамильтониана H_0 соотношения (2.15) и (2.16) запишутся в виде

$$\{T_\alpha, T_\beta\} = U^\mu_{\alpha\beta}\, T_\mu\,, \qquad \{T_\mu, H_0\} = V^\nu_\mu\, T_\nu\,, \tag{4.2}$$

которые называются соотношениями инволюции.

Из уравнений движения для обобщённых координат и импульсов, следующих из действия (4.1),

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_0\} + \lambda^\mu \{q^i, T_\mu\}, \tag{4.3}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i, H_0\} + \lambda^\mu \{p_i, T_\mu\}, \tag{4.4}$$
$$T_\mu(q, p) = 0 \tag{4.5}$$

можно получить уравнение движения для любой функции фазовых переменных и времени $A(q, p, t)$

$$\dot{A} = \{A, H_0\} + \lambda^\mu \{A, T_\mu\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Однако теперь, так как $\{T_\mu, T_\nu\} \approx 0$ в силу соотношений инволюции (4.2), условия сохранения связей во времени $\dot{T}_\mu \approx 0$ не позволяют определить ни один из множителей Лагранжа и все они остаются произвольными. Поэтому задав начальные данные $q^i(t_0)$, $p_i(t_0)$ мы не получим единственного решения задачи Коши для уравнений (4.3)–(4.5), решение этих уравнений также будет зависеть от выбора произвольных функций времени — лагранжевых множителей $\lambda^\mu(t)$. Таким образом, при одних и тех же начальных данных $q^i(t_0)$, $p_i(t_0)$ мы в качестве решения задачи Коши получаем набор (континуум) траекторий и эти решения «нумеруются» различными наборами множителей Лагранжа.

Заметим, что начальные данные $q^i(t_0)$, $p_i(t_0)$ полностью определяют состояние физической системы в начальный момент времени. Естественно ожидать, что с помощью уравнений движения (4.3)–(4.5) мы можем определить состояние физической системы в любой другой момент времени. Поэтому положим по определению, что весь набор траекторий, в действительности, описывает одно и тоже физическое состояние системы, то есть, одно и тоже состояние физической системы можно задавать различными $q^i(t)$ и $p_i(t)$, принадлежащими одному и тому же набору (классу эквивалентности) траекторий.

Расмотрим эволюцию произвольной физической величины A со временем. Пусть в начальный момент времени она имела значение $A(t_0)$. Изменяясь со временем согласно уравнению движения (4.6), в момент времени $t = t_0 + \delta t$ она будет иметь значение

$$A(t) = A(t_0) + \dot{A}(t_0)\delta t. \tag{4.7}$$

Разность между значениями величины A в момент времени t, соответствующий двум различным выборам лагранжевых множителей $\lambda^\mu(t)$ и $\lambda'^\mu(t)$ есть

$$\delta A = A(t;\lambda') - A(t;\lambda) = \{A, T_\mu\}\varepsilon^\mu\,, \tag{4.8}$$

где $\varepsilon^\mu = (\lambda' - \lambda)\delta t$. Это значит, что преобразования (4.8) не изменяют физическое состояние.

Можно проверить, что действие (4.1) инвариантно относительно преобразований фазовых переменных и лагранжевых множителей

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon q^i &= \{q^i, T_\mu\}\varepsilon^\mu\,, \\ \delta_\varepsilon p_i &= \{p_i, T_\mu\}\varepsilon^\mu\,, \\ \delta_\varepsilon \lambda^\mu &= \dot{\varepsilon}^\mu + U^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\beta\varepsilon^\alpha + V^\mu_\alpha\varepsilon^\alpha \end{aligned} \tag{4.9}$$

с произвольными инфинитезимальными параметрами ε^μ. Именно наличие этого преобразования симметрии действия (4.1) объясняет неоднозначность решения задачи Коши для уравнений (4.3)–(4.5). Все физически эквивалентные решения уравнений (4.3)–(4.5) оказываются связанными преобразованиями (4.9).

Для практических вычислений удобно выделить каким-либо способом из каждого класса эквивалентности по одному представителю. Так как у нас в решении есть m_1 произвольных функций $\lambda^\mu(t)$, то очеидно, необходимо m_1 дополнительных условий[2] $\chi^\nu(q^i, p_i, t; \lambda^\mu, \dot{\lambda}^\mu, \ldots) = 0$, которым должны удовлетворять представители каждого класса эквивалентности. Для того, чтобы эти дополнительные условия действительно выделяли по одному представителю из каждого класса эквививалентности необходимо, чтобы они не были инвариантны относительно преобразований (4.9)

$$\delta_\varepsilon \chi^\nu = \{\chi^\nu, T_\mu\}\varepsilon^\mu \neq 0 \;\;\Rightarrow\;\; \det\{\chi^\nu, T_\mu\} \neq 0\,. \tag{4.10}$$

Если накладываемые дополнительные условия зависят только от канонических переменных $\chi^\nu(q^i, p_i)$, то такие калибровки называются

[2] Эти условия также называются калибровочными условиями или просто — калибровками.

каноническими. В дальнейшем мы будем рассматривать только канонические калибровки.

После наложения калибровок система становится эквивалентной системе со связями второго рода и её динамика может быть получена из действия

$$S \; = \; \int \Big(p_i \dot{q}^i - H_0(q,p) - \lambda^\mu T_\mu - \pi_\nu \chi^\nu \Big) dt, \qquad (4.11)$$

где π_ν — дополнительные лагранжевы множители[3].

Дальнейшее рассмотрение теорий со связями первого рода аналогично рассмотрению теорий со связями второго рода.

Обобщим формулу для подсчёта количества степеней свободы (3.15) на случай теории со связями первого и второго рода

$$n_{\text{ф}} = n - m_1 - m_2/2\,, \qquad (4.12)$$

где $n_{\text{ф}}$ — количество физических степеней свободы, n — полное количество пар канонических переменных q_i и p_i, m_1 — количество связей первого рода, m_2 — количество связей второго рода.

В заключение данного параграфа приведём пример построения гамильтонова формализма для теории со связями первого рода.

Рассмотрим действие свободной релятивистской частицы в пространстве Минковского, которое возьмём в виде

$$S \; = \; \int \Big(\frac{1}{2e} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} e m^2 \Big) dt. \qquad (4.13)$$

В действии (4.13) интеграл берётся вдоль мировой линии частицы. Примем в качестве временно́й переменной параметр интегрирования t. Так как в действие (4.13) не входит производная e по времени, то очевидно, что определитель матрицы M_{ij} для данного действия равен нулю, т.е. теория является особенной.

Построим гамильтонову формулировку этой теории по процедуре описанной выше. Действие расширенной гамильтоновой системы (2.3) для релятивистской частицы примет вид

$$S = \int \Big(p_\mu (\dot{x}^\mu - v^\mu) + p(\dot{e} - v) + \frac{1}{2e} \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu - \frac{1}{2} e m^2 \Big) dt. \qquad (4.14)$$

[3] Отметим, что в общем случае калибровочные условия могут зависеть от всех переменных, в том числе и от новых лагранжевых множителей π_ν.

Отсюда находим уравнения связывающие импульсы и скорости

$$p_\mu = \frac{1}{e} v_\mu, \qquad p = 0. \tag{4.15}$$

Скорости v^μ можно выразить через импульсы p_μ

$$v^\mu = e p^\mu, \tag{4.16}$$

и подставить в действие (4.14), в то время как скорость v выразить невозможно и она играет роль лагранжевого множителя $v = \lambda$. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \int \Big(p_\mu \dot{x}^\mu + p\dot{e} - H_0 - \lambda T_1 \Big) dt && (4.17) \\ & H_0 = \frac{1}{2} e (p_\mu p^\mu + m^2) && (4.18) \\ & T_1 = p. && (4.19) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили гамильтониан H_0 и первичную связь T_1.

Сохранение во времени первичной связи T_1 приводит к связи второго этапа

$$\dot{T}_1 = \dot{p} = -\frac{1}{2}(p_\mu p^\mu + m^2) = 0. \tag{4.20}$$

Выберем связь второго этапа в виде $T_2 = p_\mu p^\mu + m^2$ и добавим её в действие (4.17) со своим лагранжевым множителем

$$\begin{aligned} S &= \int \Big(p_\mu \dot{x}^\mu + p\dot{e} - H_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 \Big) dt && (4.21) \\ & H_0 = \frac{1}{2} e (p_\mu p^\mu + m^2) && (4.22) \\ & T_1 = p, \qquad T_2 = p_\mu p^\mu + m^2. && (4.23) \end{aligned}$$

Уравнения движения, следующие из действия (4.21), имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{e} = \lambda_1, && \dot{p} = -\tfrac{1}{2}(p_\mu p^\mu + m^2), && (4.24) \\ &\dot{x}^\mu = (e + 2\lambda_2)\, p^\mu, && \dot{p}^\mu = 0, && (4.25) \\ &p = 0, && p_\mu p^\mu + m^2 = 0. && (4.26) \end{aligned}$$

Уравнения Гамильтона (4.24) и (4.25) можно записать с использованием скобки Пуассона

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial p_\mu} + \frac{\partial A}{\partial e}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{\partial B}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial e} \tag{4.27}$$

$$\dot{e} = \{e, H_0\} + \lambda_i\{e, T_i\} \qquad \dot{p} = \{p, H_0\} + \lambda_i\{p, T_i\}$$
$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H_0\} + \lambda_i\{x^\mu, T_i\} \qquad \dot{p}_\mu = \{p_\mu, H_0\} + \lambda_i\{p_\mu, T_i\}$$

Условия сохранений связей во времени выполняются тождественно, при выполнении уравнений движения, и, как следствие, не приводят к появлению новых связей и не позволяют определить лагранжевы множители λ_i. Таким образом связи T_1 и T_2 — это все связи теории. Скобка Пуассона связей равна нулю $\{T_1, T_2\} = 0$, поэтому связи T_1 и T_2 — это связи первого рода. Соотношения инволюции (4.2) для рассматриваемой системы имеют вид

$$\{T_1, T_2\} = 0, \qquad \{T_1, H_0\} = -\tfrac{1}{2}T_2, \qquad \{T_2, H_0\} = 0. \tag{4.28}$$

Так как лагранжевы множители λ_i остались произвольными, то решение уравнений (4.24) и (4.25) будет содержать функциональный произвол, связанный с этими лагранжевыми множителями. Поэтому одни и теже начальные данные будут давать целый класс (физически эквивалентных) решений. Наличие этого произвола в решении объясняется тем, что действие (4.21) инвариантно относительно преобразований

$$\delta e = \varepsilon_1, \qquad \delta p = 0, \qquad \delta\lambda_1 = \dot{\varepsilon}_1, \tag{4.29}$$
$$\delta x^\mu = 2p^\mu\varepsilon_2, \qquad \delta p_\mu = 0, \qquad \delta\lambda_2 = \dot{\varepsilon}_2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1, \tag{4.30}$$

которые являются преобразованиями (4.9) для рассматриваемой теории.

Для того чтобы выделить из каждого класса эквивалентности по одной траектории необходимо наложить дополнительные условия. Так как преобразования с параметром ε_2 не влияют на преобразования e, p и λ_1 (4.29), то мы можем сначала зафиксировать симметрию, которая генерируется связью T_1. Для этого надо выбрать дополнительное условие χ_1, такое, что $\{\chi_1, T_1\} \neq 0$. Возьмём его в виде

$\chi_1 = e - 1$. После этого можно показать, что канонически сопряжённые переменные e и p выпадают из действия и его можно записать как

$$S = \int \Big(p_\mu \dot{x}^\mu - NT_2\Big) dt, \tag{4.31}$$

$$T_2 = p_\mu p^\mu + m^2, \qquad N = \lambda_1 + \tfrac{1}{2}. \tag{4.32}$$

Теперь зафиксируем оставшуюся симметрию, генериремую связью T_2. Выберем дополнительное условие в виде

$$\chi_2 = x^0 - t = 0, \quad \{\chi_2, T_2\} = 2p^0 \neq 0 \tag{4.33}$$

и запишем действие (4.31) с калибровочным условием (4.33)

$$S = \int \Big(p_\mu \dot{x}^\mu - NT_2 - \pi\chi_2\Big) dt. \tag{4.34}$$

Уравнения движения, следующие из этого действия, имеют вид

$$\dot{x}^\mu = 2Np^\mu, \qquad \dot{p}_\mu = -\pi\delta^0_\mu, \tag{4.35}$$

$$p_\mu p^\mu + m^2 = 0, \qquad x^0 = t. \tag{4.36}$$

Из условий сохранения во времени связи T_2 и дополнительного условия χ_2 найдём лагранжевы множители

$$\dot{T}_2 = \pi\{T_2, \chi_2\} = -2\pi p^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi = 0,$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + N\{\chi_2, T_2\} = -1 + 2Np^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{2p^0}$$

и подставляя их в уравнения движения (4.35) получим уравнения движения для свободной релятивистской частицы

$$\dot{x}^\mu = p^\mu / p^0, \qquad \dot{p}_\mu = 0. \tag{4.37}$$

Выберем в качестве физических переменных пространственные координаты x^i и канонически сопряжённые им импульсы p_i. Тогда действие (3.16) для свободной релятивистской частицы в физических переменных примет вид

$$S = \int \Big(p_i \dot{x}^i - \sqrt{p_i^2 + m^2}\Big) dt, \tag{4.38}$$

где $p^0 = -p_0 = H_\text{ф} = \sqrt{p_i^2 + m^2}$ — энергия частицы.

Перейдём к примерам построения гамильтоновых формулировок различных физических теорий.

Контрольные вопросы

1. Какие теории называются теориями со связями первого рода?
2. Какие соотношения называют соотношениями инволюции?
3. Проверить, что действие (4.1) инвариантно относительно преобразований (4.9).
4. По какой формуле расчитывается количество физических степеней свободы в теориях со связями первого и второго рода?
5. Получите действие для свободной релятивистской частицы в физических переменных (4.38).

Глава 5. Гамильтонова формулировка для электродинамики

Рассмотрим электродинамику Максвелла. Действие для электромагнитного поля можно записать в виде

$$S \;=\; -\frac{1}{4}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,d^4x, \tag{5.1}$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ — напряжённость электромагнитного поля, а A_α — четырёхмерный потенциал электромагнитного поля. Напряжённость и, как следствие, действие (5.1), инвариантны относительно преобразований потенциала

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon. \tag{5.2}$$

Выделим в действии (5.1) производные по времени в явном виде

$$\begin{aligned} S \;&=\; -\frac{1}{4}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\,d^4x = -\frac{1}{4}\int \Big(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}\Big)\,d^4x \\ &=\; \int \Big(\tfrac{1}{2}(\dot A_i - \partial_i A_0)^2 - \tfrac{1}{4}F_{ij}^2\Big)\,d^4x, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\dot A_i = \partial_0 A_i$, и построим действие расширенной гамильтоновой системы (2.3)

$$S_V \;=\; \int d^4x\Big(p^\mu(\dot A_\mu - V_\mu) + \tfrac{1}{2}(V_i - \partial_i A_0)^2 - \tfrac{1}{4}F_{ij}^2\Big) \tag{5.4}$$

Из уравнений, связывающих скорости и импульсы,

$$\frac{\delta S_V}{\delta V_0} = -p^0 = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\delta S_V}{\delta V_i} = -p^i + V_i - \partial_i A_0 = 0 \tag{5.6}$$

видно, что мы можем выразить через импульсы только скорости V_i, а скорость V_0 остаётся произвольной. Вводя обозначения

$$p^0 = p, \qquad A_0 = A, \qquad V_0 = \lambda_1, \tag{5.7}$$

действие (2.5) с первичными связями запишется в виде

$$S \; = \; \int d^4x \Big(p\dot{A} + p_i \dot{A}_i - H_0 - \lambda_1 T_1 \Big) \tag{5.8}$$

$$H_0 = \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 - A\partial^i p_i$$

$$T_1 = p$$

Сохранение первичной связи во времени даёт связь второго этапа

$$\dot{T}_1 \; = \; \partial^i p_i \equiv T_2 = 0. \tag{5.9}$$

Добавим вторичную связь в действие (5.8) со своим лагранжевым множителем

$$S \; = \; \int d^4x \Big(p\dot{A} + p_i \dot{A}_i - H_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 \Big) \tag{5.10}$$

и, повторяя процедуру поиска новых связей, получим

$$\dot{T}_1 = T_2 \approx 0, \quad \dot{T}_2 \equiv 0. \tag{5.11}$$

Таким образом T_1 и T_2 это все связи теории и это связи первого рода, т.к. $\{T_1, T_2\} = 0$ и, согласно формуле (4.12), рассматриваемая система имеет две степени свободы. Соотношения инволюции (4.2) имеют вид

$$\{T_1, T_2\} = 0, \qquad \{T_1, H_0\} = T_2, \qquad \{T_2, H_0\} = 0. \tag{5.12}$$

Используя (5.12), запишем преобразования симметрии действия (5.10)

$$\begin{aligned} &\delta A = \varepsilon_1, && \delta p = 0, && \delta\lambda_1 = \dot{\varepsilon}_1, \\ &\delta A_i = -\partial_i \varepsilon_2, && \delta p_i = 0, && \delta\lambda_2 = \dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Преобразования симметрии с параметром ε_2 не влияют на A, p и λ_1 и поэтому, так же как и в случае релятивистской частицы, мы можем фиксировать симметрию постепенно. Зафиксируем сначала симметрию, генерируемую связью T_1. Для этого наложим дополнительное условие $\chi_1 = A = 0$, $\{\chi_1, T_1\} = 1 \neq 0$. После частичной фиксации калибровки, аналогично случаю релятивистской частицы, канонически сопряжённые переменные A и p станут равны нулю, и действие примет вид

$$S = \int d^4x \Big(p_i \dot{A}_i - H_0' - \lambda_2 T_2 \Big), \tag{5.14}$$
$$H_0' = \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2, \qquad T_2 = \partial^i p_i.$$

Заметим, что остаточная симметрия действия есть

$$\delta A_i = -\partial_i \varepsilon_2, \qquad \delta p_i = 0, \qquad \delta \lambda_2 = \dot{\varepsilon}_2 \tag{5.15}$$

и, если положить $\lambda_2 = -A_0$, то преобразования для полей $A_\mu = (-\lambda_2, A_i)$ совпадут с (5.2). Для дальнейшей фиксации симметрии (5.15) наложим дополнительное условие $\chi_2 = \partial^i A_i = 0$. Калибровочные условия $\chi_1 = A_0 = 0$ и $\chi_2 = \partial^i A_i = 0$ называются кулоновской калибровкой. Заметим, что лоренцевской калибровке соответствует условие $\chi_2 = \dot{\lambda}_2 + \partial^i A_i = 0$, но эта калибровка не является канонической и здесь мы её рассматривать не будем. Действие, в котором симметрия полностью зафиксирована, имеет вид

$$S = \int d^4x \Big(p_i \dot{A}_i - \tfrac{1}{2} p_i^2 - \tfrac{1}{4} F_{ij}^2 - \lambda_2 \partial^i p_i - \pi_2 \partial^i A_i \Big). \tag{5.16}$$

Из уравнений движения

$$\dot{A}_i = p_i - \partial_i \lambda_2, \qquad \dot{p}_i = \partial_j F_{ji} + \partial_i \pi_2, \tag{5.17}$$
$$\partial^i A_i = 0, \qquad \partial^i p_i = 0 \tag{5.18}$$

можно определить множители Лагранжа. При нулевых граничных условиях получим, что $\lambda_2 = \pi_2 = 0$. Физическими переменными в свободной электродинамике будут две трёхмерно поперечные компоненты A_i и две трёхмерно поперечные компоненты p_i, для которых условия трёхмерной поперечности (5.18) выполняются тождественно.

Контрольные вопросы

1. Построёте действие для расширенной гамильтоновой системы (5.4).

2. Проверьте выполнение соотношения (5.9).

3. Проверьте, что действие (5.10) инвариантно относительно преобразований (5.13).

4. Проверьте, что действие (5.14 инвариантно относительно преобразований (5.15).

5. Какие величины являются физическими в кулоновской калибровке?

Глава 6. Гамильтонова формулировка для массивного векторного поля

Массивное векторное поле спина 1 можно описать с помощью лагранжиана Прока, который имеет вид

$$S \;=\; \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{m^2}{2}A_\alpha A^\alpha\right), \tag{6.1}$$

где $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. В отличие от действия для электромагнитного поля (5.1), действие (6.1) не инвариантно относительно преобразований (5.2) из-за присутствия массового члена в действии.

Выделим в действии (6.1) производные по времени в явном виде

$$\begin{aligned} S \;&=\; \int \left(-\tfrac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \tfrac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha\right) d^4x \\ &=\; \int \left(\tfrac{1}{2}(\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - \tfrac{1}{4}F_{ij}^2 - \tfrac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha\right) d^4x, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где $\dot{A}_i = \partial_0 A_i$, и построим действие расширенной гамильтоновой системы (2.3)

$$\begin{aligned} S_V \;=\; \int d^4x \Big(& P^\mu(\dot{A}_\mu - V_\mu) + \tfrac{1}{2}(V_i - \partial_i A_0)^2 - \\ & - \tfrac{1}{4}F_{ij}^2 - \tfrac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha \Big) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Из уравнений, связывающих скорости и импульсы,

$$\frac{\delta S_V}{\delta V_0} = -P^0 = 0, \tag{6.4}$$

$$\frac{\delta S_V}{\delta V_i} = -P^i + V_i - \partial_i A_0 = 0 \tag{6.5}$$

видно, что мы можем выразить через импульсы только скорости V_i, а скорость V_0 остаётся произвольной. Вводя обозначения

$$P^0 = P, \qquad A_0 = A, \qquad V_0 = \lambda_1, \tag{6.6}$$

действие (2.5) с первичными связями запишется в виде

$$\begin{aligned} S \ &= \ \int d^4x\Big(P\dot{A} + P_i\dot{A}_i - H_0 - \lambda_1 T_1\Big), \qquad (6.7) \\ &H_0 = \tfrac{1}{2}P_i^2 + \tfrac{1}{4}F_{ij}^2 + \tfrac{1}{2}m^2A_i^2 - A\partial^i P_i - \tfrac{1}{2}m^2A^2, \\ &T_1 = P. \end{aligned}$$

Сохранение первичной связи во времени даёт связь второго этапа

$$\dot{T}_1 = \dot{P} = m^2 A + \partial^i P_i \equiv T_2 = 0. \tag{6.8}$$

Добавим вторичную связь в действие (6.7) со своим лагранжевым множителем

$$S \ = \ \int d^4x\Big(P\dot{A} + P_i\dot{A}_i - H_0 - \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2\Big) \tag{6.9}$$

и, повторяя процедуру поиска новых связей, получим

$$\begin{aligned} &\dot{T}_1 = T_2 - \lambda_2 m^2 \approx -\lambda_2 m^2 \not\approx 0, \\ &\dot{T}_2 = m^2(\lambda_1 + \partial^i A_i) \not\approx 0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Так как связи должны сохраняться во все моменты времени, то (6.10) являются уравнениями для нахождения лагранжевых множителей

$$\lambda_1 = -\partial^i A_i, \quad \lambda_2 = 0. \tag{6.11}$$

Таким образом мы определили все множители Лагранжа и T_1 и T_2 это все связи теории и это связи второго рода, т.к. $\{T_1, T_2\} = m^2 \neq 0$.

Согласно формуле (4.12), рассматриваемая система имеет три степени свободы.

Выберем в качестве физических переменных пространственные компоненты вектора A_i и канонически сопряженные им компоненты импульса P_i. Тогда оставшиеся переменные выражаются через физические как $A = -\frac{1}{m^2}\partial^i P_i$ и $P = 0$. Подставляя их в действие (6.9) получим действие (3.16) для физических переменных

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\Big(P_i\dot{A}_i - H_{\text{ф}}\Big), \\ & H_{\text{ф}} = \frac{1}{2}P_i^2 + \frac{1}{2m^2}(\partial^i P_i)^2 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + \frac{1}{2}m^2 A_i^2, \end{aligned} \tag{6.12}$$

где $H_{\text{ф}}$ — физический гамильтониан.

Контрольные вопросы

1. Относительно каких преобразований действие (6.1) инвариантно?
2. Постройте действие для расширенной гамильтоновой системы (6.3).
3. Проверьте выполнение соотношения (6.8).
4. Получите физический гамильтониан (6.12).
5. Какие величины являются физическими для массивного векторного поля спина 1?

Глава 7. Гамильтонова формулировка для теории поля Янга-Миллса

Рассмотрим векторное поле, принимающее значения в алгебре Ли некоторой компактной полупростой группы

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)t^a, \tag{7.1}$$

где t^a — генераторы рассматриваемой группы, а индекс a пробегает значение от 1 до r, r — размерность группы. Такие поля A_μ называют полями Янга-Миллса и они являются обобщением электромагнитного поля, которое получается, если в качестве группы взять $U(1)$. Не останавливаясь на подробном изложении теории поля Янга-Миллса, которое можно найти в других учебниках, например, в [2], приведём здесь только те факты, которые необходимы для дальнейшего изложения. Будем считать, что генераторы группы могут быть реализованы эрмитовыми матрицами $(T^a)^+ = T^a$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}, \qquad [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \tag{7.2}$$

где структурные константы f^{abc} абсолютно антисимметричны и удовлетворяют тождеству

$$f^{abc} f^{cde} + f^{adc} f^{ceb} + f^{aec} f^{cbd} \equiv 0 \qquad \text{(цикл по } b,\ d,\ e).$$

Действие для поля Янга-Миллса записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ &= \ -\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}\ G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} d^4x = -\frac{1}{4}\int G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} d^4x \\ & \quad\ G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T^a, \\ & \quad\ G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu = -G^a_{\nu\mu}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где $G_{\mu\nu}$ — напряжённость поля Янга-Миллса. Действие (7.3) инвариантно относительно преобразований

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu \varepsilon^a + g f^{abc} A^b_\mu \varepsilon^c \equiv D_\mu \varepsilon^a, \tag{7.4}$$

при этом напряжённость преобразуется как

$$\delta G^a_{\mu\nu} = g f^{abc} G^b_{\mu\nu} \varepsilon^c. \tag{7.5}$$

Построим действие расширенной гамильтоновой системы (2.3)

$$\begin{aligned} S_V \ = \ \int d^4x \Big(& p^{a\mu}(\dot{A}^a_\mu - V^a_\mu) + \\ & + \tfrac{1}{2}(V^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i)^2 - \tfrac{1}{4} G^{a\,2}_{ij} \Big). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Из уравнений, связывающих скорости и импульсы,

$$\frac{\delta S_V}{\delta V^a_0} = -p^{a0} = 0, \tag{7.7}$$

$$\frac{\delta S_V}{\delta V^a_i} = -p^{ai} + V^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i = 0 \tag{7.8}$$

видно, что мы можем выразить через импульсы только скорости V_i^a, а скорость V_0^a остаётся произвольной. Вводя обозначения

$$p^{a0} = p^a, \qquad A_0^a = A^a, \qquad V_0^a = \lambda_1^a, \tag{7.9}$$

действие (2.5) с первичными связями запишется в виде

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \Big(p^a \dot{A}^a + p_i^a \dot{A}_i^a - H_0 - \lambda_1^a T_1^a \Big) \\ & H_0 = \frac{1}{2}(p_i^a)^2 + \frac{1}{4}(G_{ij}^a)^2 - A^a D^i p_i^a \\ & D^i p_i^a \equiv \partial_i p_i^a + g f^{abc} A_i^b p_i^c \\ & T_1^a = p^a \end{aligned} \tag{7.10}$$

Сохранение первичных связей во времени даёт связи второго этапа

$$\dot{T}_1^a = D^i p_i^a \equiv T_2^a = 0. \tag{7.11}$$

Добавим вторичные связи в действие (7.10) со своими лагранжевыми множителями

$$S = \int d^4x \Big(p^a \dot{A}^a + p_i^a \dot{A}_i^a - H_0 - \lambda_1^a T_1^a - \lambda_2^a T_2^a \Big). \tag{7.12}$$

Уравнения движения для полей и импульсов, при условии выполнения связей, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{A}^a &= \lambda_1^a, & \dot{A}_i^a &= p_i^a + D_i A^a - D_i \lambda_2^a, \\ \dot{p}^a &= D^i p_i^a, & \dot{p}_i^a &= D_j G_{ji}^a + g f^{abc} p_i^b (A^c - \lambda_2^c), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & D_i A^a \equiv \partial_i A^a + g f^{abc} A_i^b A^c & & D_j G_{ji}^a \equiv \partial_j G_{ji}^a + g f^{abc} A_j^b G_{ji}^c \\ & D_i \lambda_2^a \equiv \partial_i \lambda_2^a + g f^{abc} A_i^b \lambda_2^c \end{aligned}$$

Повторяя процедуру поиска новых связей, получим

$$\dot{T}_1^a = T_2^a \approx 0, \quad \dot{T}_2^a = g f^{abc} T_2^b (A^c - \lambda_2^c) \approx 0 \tag{7.13}$$

и, следовательно, T_1^a и T_2^a — это все связи теории и это связи первого рода. Соотношения инволюции (4.2) имеют вид

$$\{T_1^a, T_1^b\} = 0, \qquad \{T_1^a, T_2^b\} = 0, \tag{7.14}$$

$$\{T_1^a, H_0\} = T_2^a, \tag{7.15}$$

$$\{T_2^a, T_2^b\} = g f^{abc} T_2^c \qquad \{T_2^a, H_0\} = g f^{abc} T_2^b A^c. \tag{7.16}$$

Согласно формуле (4.12), рассматриваемая система имеет $2r$ степени свободы.

Используя (7.14)–(7.16), запишем преобразования симметрии (4.9) действия (7.12)

$$\delta A^a = \varepsilon_1^a, \qquad \delta p^a = 0, \tag{7.17}$$

$$\delta A_i^a = -D_i\varepsilon_2^a, \qquad \delta p_i^a = gf^{abc}\varepsilon_2^b p_i^c, \tag{7.18}$$

$$\delta\lambda_1^a = \dot{\varepsilon}_1^a, \qquad \delta\lambda_2^a = \dot{\varepsilon}_2^a + gf^{abc}\varepsilon_2^b(\lambda_2^c - A^c) + \varepsilon_1^a. \tag{7.19}$$

Преобразования симметрии с параметром ε_2^a не влияют на A^a, p^a и λ_1^a и поэтому, так же как и в случае релятивистской частицы, мы можем фиксировать симметрию постепенно. Зафиксируем сначала симметрию, генерируемую связью T_1^a. Для этого наложим дополнительное условие $\chi_1^a = A^a = 0$, $\{\chi_1^a, T_1^b\} = \delta^{ab} \neq 0$. После частичной фиксации калибровки, аналогично случаю релятивистской частицы, канонически сопряжённые переменные A^a и p^a станут равны нулю, и действие примет вид

$$S = \int d^4x\Big(p_i^a\dot{A}_i^a - H_0' - \lambda_2^a T_2^a\Big), \tag{7.20}$$

$$H_0' = \tfrac{1}{2}\,p_i^{a2} + \tfrac{1}{4}\,G_{ij}^{a\,2}, \qquad T_2^a = D_i p_i^a.$$

Заметим, что остаточная симметрия действия есть

$$\delta A_i^a = -D_i\varepsilon_2^a, \qquad \delta p_i^a = gf^{abc}\varepsilon_2^b p_i^c, \tag{7.21}$$

$$\delta\lambda_2^a = \dot{\varepsilon}_2^a + gf^{abc}\varepsilon_2^b\lambda_2^c.$$

Для дальнейшей фиксации симметрии (7.21) можно наложить дополнительное условие[4] $\chi_2 = \partial_i A_i = 0$. Действие в виде (7.20) обычно используется для квантования теории поля Янга-Миллса.

Построение гамильтоновой формулировки теории поля Янга-Миллса для действия

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\int\Big(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c - \tfrac{1}{2}G_{\mu\nu}^a\Big)G^{a\mu\nu}d^4x, \tag{7.22}$$

в котором A_μ^a и $G_{\mu\nu}^a$ считаются независимыми, можно найти в книге [3].

[4] В данном пособии мы не рассмвтриваем проблему неоднозначностей Грибова.

Контрольные вопросы

1. Проверьте инвариантность действия (7.3) относительно преобразований (7.4).

2. Выведите закон преобразования для напряжённости поля Янга-Милса (7.5) относительно преобразований (7.4).

3. Проверьте выполнение соотношения (7.11).

4. Проверьте инвариантность действия (7.12) относительно преобразований (7.17)–(7.19).

5. Проверьте инвариантность действия (7.20) относительно преобразований (7.21).

Глава 8. Гамильтонова формулировка для гравитации

Действие Эйнштейна для гравитационного поля без материальных полей имеет вид

$$S \;=\; \int \sqrt{-g}\, R\, d^4x, \tag{8.1}$$

где $g = \det g_{\mu\nu}$, R — скалярная кривизна, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}$, $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu$.

При построении гамильтоновой формулировки мы будем предполагать, что роль времени играет координата x^0 и будем использовать удобную параметризацию метрики $g_{\mu\nu} = (g_{ab} = \gamma_{ab}, g_{0a} = N_a, g_{00} = -N^2 + N_a N^a)$ предложенную Арновиттом, Дезером и Мизнером[4] (АДМ). Здесь индексы $a, b, \ldots$ пробегают значения $1, 2, 3$, γ_{ab} — метрика трёхмерной пространственно подобной поверхности $x^0 = \mathrm{const}$. Пространственные индексы поднимаются с помощью γ^{ab} — обратной к γ_{ab} метрике $\gamma^{ab}\gamma_{bc} = \delta^a_c$, $N^a = \gamma^{ab} N_b$. Функция N называется функция хода (lapse function), функция N_a — функция сдвига (shift function). Разложение обратной четырёхмерной метрики имеет вид $g^{\mu\nu} = (g^{ab} = \gamma^{ab} - N^a N^b/N^2, g^{0a} = N^a/N^2, g^{00} = -1/N^2)$.

Найдем выражение для действия (8.1) в параметризации АДМ. Во-первых заметим, что $\det g_{\mu\nu}$ не зависит от функции хода N_a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial N_a} &= g\, g^{\mu\nu}\, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial N_a} = g\Big(g^{00}\, \frac{\partial g_{00}}{\partial N_a} + 2g^{0b}\, \frac{\partial g_{0b}}{\partial N_a}\Big) = \\ &= g\Big(-\frac{1}{N^2}\, 2N^a + 2\frac{N^b}{N^2}\, \delta^a_b\Big) = 0.\end{aligned}$$

Поэтому $\det g_{\mu\nu}$ можно вычислить, положив сразу $N_a = 0$. В результате получим, что

$$\det g_{\mu\nu} = -N^2 \det \gamma_{ab} \qquad \text{и} \qquad \sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma} \tag{8.2}$$

Теперь найдём символы Кристоффеля в параметризации АДМ. Для этого предварительно выразим $\dot\gamma_{ab}$ и $\dot\gamma^{ab}$ через $K_{ab} = N^{-1}(N_{(a;b)} - \frac{1}{2}\dot\gamma_{ab})$ — тензор внешней кривизны поверхности $x^0 = \mathrm{const}$. Получим

$$\begin{aligned}\dot\gamma_{ab} &= -2NK_{ab} + N_{a;b} + N_{b;a}, \\ \dot\gamma^{ab} &= 2NK^{ab} - N^{a;b} - N^{b;a},\end{aligned} \tag{8.3}$$

где использованы следующие соотношения

$$\gamma^{ab}\gamma_{bc} = \delta^a_c \quad \Rightarrow \quad \dot\gamma^{ab}\gamma_{bc} + \gamma^{ab}\dot\gamma_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot\gamma^{ab} = -\gamma^{ac}\gamma^{bd}\dot\gamma_{cd}$$

В качестве примера вычислим Γ^0_{00}. Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\alpha}\Big(2g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} + \frac{1}{2}g^{0a}\Big(2g_{a0,0} - g_{00,a}\Big) = \\ &= -\frac{1}{2N^2}\frac{d}{dt}\Big(-N^2 + \gamma^{ab}N_aN_b\Big) = \\ &\qquad + \frac{N^a}{2N^2}\Big(2\dot N_a - (-N^2 + N_bN^b)_{;a}\Big) = \\ &= \frac{\dot N}{N} - \cancel{\frac{N^a\dot N_a}{N^2}} - \frac{N_aN_b}{2N^2}\dot\gamma^{ab} + \\ &\qquad + \cancel{\frac{N^a\dot N_a}{N^2}} + \frac{N^aN_{;a}}{N} - \frac{N^aN^bN_{b;a}}{N^2} = \\ &= \frac{\dot N}{N} - \frac{N_aN_b}{N^2}\Big(NK^{ab} - \cancel{N^{b;a}}\Big) + \frac{N^aN_{;a}}{N} - \cancel{\frac{N^aN^bN_{b;a}}{N^2}} = \\ &= \frac{\dot N}{N} + \frac{N^aN_{;a}}{N} - K_{ab}\frac{N^aN^b}{N},\end{aligned}$$

где точка с запятой обозначает коваринтное дифференцирование относительно трёхмерной метрики. Аналогично вычисляются остальные символы Кристоффеля. Результат имеет вид

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ab} &= -\frac{1}{N}K_{ab}\,,\\
\Gamma^0_{0a} &= \frac{N_{;a}}{N}-\frac{N^b}{N}K_{ab}\,,\\
\Gamma^c_{ab} &= \gamma^c_{ab}+\frac{N^c}{N}K_{ab}\,,\\
\Gamma^c_{0a} &= N^c_{;a}-\frac{N^cN_{;a}}{N}+NK_{ab}\left(\frac{N^bN^c}{N^2}-\gamma^{bc}\right),\\
\Gamma^0_{00} &= \frac{\dot N}{N}+\frac{N^aN_{;a}}{N}-K_{ab}\frac{N^aN^b}{N}\,,\\
\Gamma^a_{00} &= \dot N^a-N^a\frac{\dot N}{N}-2NK^{ab}N_b+K_{bc}N^a\frac{N^bN^c}{N}+\\
&\quad +NN^{;a}-N^aN^b\frac{N_{;b}}{N}+N^a_{;c}N^c,
\end{aligned}$$

где γ^c_{ab} — символы Кристоффеля построенные по трёхмерной метрике γ_{ab}. Для дальнейших вычислений также полезно найти

$$\Gamma^\beta_{0\beta}=\frac{\dot N}{N}+N^a_{;a}-NK,\qquad \Gamma^\beta_{a\beta}=\gamma^b_{ab}+\frac{N_{;a}}{N},$$
$$\dot\gamma^b_{ab}=(N^b_{;b}-NK)_{;a}.$$

Теперь вычислим компоненты тензора Риччи

$$\begin{aligned}
R_{ab} &= R^{(3)}_{ab}+KK_{ab}-2K_{ac}K^c_b+\\
&\quad +\frac{1}{N}\Big(N^cK_{ab;c}+K_{ac}N^c_{;b}+K_{bc}N^c_{;a}-N_{;ab}-\dot K_{ab}\Big)\\
R_{0a} &= N^b\Big(R^{(3)}_{ab}+KK_{ab}-2K_{ac}K^c_b\Big)+N\Big(K_{;a}-K^b_{a;b}\Big)+\\
&\quad +\frac{N^b}{N}\Big(N^cK_{ab;c}+K_{ac}N^c_{;b}+K_{bc}N^c_{;a}-N_{;ab}-\dot K_{ab}\Big)=\\
&= N^bR_{ab}+N\Big(K_{;a}-K^b_{a;b}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= N^a N^b \Big(R^{(3)}_{ab} + K K_{ab} - 2K_{ac}K^c_b \Big) + \\
&\quad + \frac{N^a N^b}{N} \Big(N^c K_{ab;c} + 2K_{ac}N^c_{;b} - N_{;ab} - \dot{K}_{ab} \Big) + \\
&\quad + N N^{;a}_{;a} + N N^a \Big(K_{;a} - 2K^b_{a;b} \Big) + \\
&\quad - N^2 K^{ab} K_{ab} + N\dot{K} = \\
&= N^a N^b R_{ab} + N N^{;a}_{;a} + N N^a \Big(K_{;a} - 2K^b_{a;b} \Big) - \\
&\quad - N^2 K^{ab} K_{ab} + N\dot{K},
\end{aligned}
$$

скалярную кривизну

$$
\begin{aligned}
R &= g^{00} R_{00} + 2g^{0a} R_{0a} + g^{ab} R_{ab} = \\
&= -\frac{1}{N^2} R_{00} + \frac{2N^a}{N^2} R_{0a} + \Big(\gamma^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \Big) R_{ab} = \\
&= \gamma^{ab} R_{ab} + \frac{1}{N} \Big(N K^{ab} K_{ab} + N^a K_{;a} - N^{;a}_{;a} - \dot{K} \Big) = \\
&= R^{(3)} + K^2 + K_{ab} K^{ab} + \frac{2}{N} \Big(N^a K_{;a} - N^{;a}_{;a} - \dot{K} \Big),
\end{aligned}
$$

где $R^{(3)}_{ab}$ и $R^{(3)}$ — тензор Риччи и скалярная кривизна поверхности $x^0 = \mathrm{const}$. Наконец, получим

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g} R &= N\sqrt{\gamma} \Big[R^{(3)} + K_{ab} K^{ab} - K^2 \Big] + \\
&\quad + 2\partial_a (\sqrt{\gamma} \{ N^a K - N^{;a} \}) - 2\partial_0 (\sqrt{\gamma} K),
\end{aligned}
$$

где при получении последнего равенства использовано

$$
\partial_0 \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}\, (N^c_{;c} - NK) \qquad \partial_a \sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}\, \gamma^b_{ab} \tag{8.4}
$$

Подставляя найденное выше в действие для гравитационного поля найдём с точностью до полной производной

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x\, \mathcal{L}_{\text{АДМ}}, \\
&\quad \mathcal{L}_{\text{АДМ}} = N\sqrt{\gamma} \left[R^{(3)} + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right].
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

Приступим к построению канонической формулировки теории. Запишем действие расширенной гамильтоновой системы (2.3)

$$\begin{aligned} S_V &= \int d^4x \Big(P(\dot N - V) + P_a(\dot N^a - V^a) + \pi^{ab}(\dot g_{ab} - v_{ab}) + \\ &\qquad + N\sqrt{\gamma}\left[R^{(3)} + K_{v\,ab}K_v^{ab} - K_v^2\right]\Big) \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$K_{v\,ab} = N^{-1}(N_{(a;b)} - \tfrac{1}{2}v_{ab}) \qquad K_v = \gamma^{ab}K_{v\,ab}$$

и попытаемся выразить скорости через импульсы

$$\frac{\delta S}{\delta V} = -P = 0, \qquad \frac{\delta S}{\delta V^a} = -P_a = 0, \tag{8.7}$$

$$\frac{\delta S}{\delta v_{ab}} = -\pi^{ab} - \sqrt{\gamma}[K^{ab} - \gamma^{ab}K]. \tag{8.8}$$

Из (8.7) видно, что скорости V и V^a невозможно выразить через импульсы и они остаются произвольными. Эти скорости играют роль лагранжевых множителей для первичных связей $P = 0$ и $P_a = 0$. Выразим оставшиеся скорости v_{ab} через импульсы π^{ab}. Имеем

$$K = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \qquad K^{ab} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\gamma^{ab}\pi - 2\pi^{ab}) \qquad \pi = \gamma_{ab}\pi^{ab}$$

$$v_{ab} = \frac{N}{\sqrt{\gamma}}(2\pi_{ab} - \gamma_{ab}\pi) - 2N_{(a;b)}$$

После подстановки скоростей v_{ab} в действие (8.6) получим

$$\begin{aligned} S_V &= \int d^4x \Big(P\dot N + P_a\dot N^a + \pi^{ab}\dot g_{ab} \\ &\qquad - NT - N^aT_a - VP - V_aP^a\Big) \end{aligned} \tag{8.9}$$

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(2\pi^{ab}\pi_{ab} - \pi^2) - \sqrt{\gamma}R^{(3)} \tag{8.10}$$

$$T_a = -2\pi^b_{a;b} \tag{8.11}$$

Условия сохранения первичных связей во времени $\dot P = 0$ и $\dot P^a = 0$ приводят ко вторичным связям

$$T = 0 \qquad T_a = 0. \tag{8.12}$$

Сохранение во времени связей второго этапа $\dot{T} = 0$ и $\dot{T}_a = 0$ не приводят к появлению новых связей.

Не нулевые скобки Пуассона связей имеют вид

$$\begin{aligned}
\{T(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}')\} &= T^a(\mathbf{x})\partial_a\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}') - T^a(\mathbf{x}')\partial_a\delta(\mathbf{x}',\mathbf{x}) \\
\{T_a(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}')\} &= T(\mathbf{x})\partial_a\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}') \\
\{T_a(\mathbf{x}), T_b(\mathbf{x}')\} &= T_b(\mathbf{x})\partial_a\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}') - T_a(\mathbf{x}')\partial_b\delta(\mathbf{x}',\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Подробности вычислений этой алгебры приведены в следуюшем разделе.

Мы можем подставить решения связей $P = 0$ и $P^a = 0$ в действие (8.9) и получить действие в гамильтоновой форме, которое обычно используется для квантования гравитации и вывода уравнения Уиллера-ДеВитта

$$S = \int d^4x \Big(\pi^{ab}\dot{g}_{ab} - NT - N^aT_a\Big). \tag{8.14}$$

Получение гамильтоновой формулировки эйнштейновской гравитации, в которой метрика $g_{\mu\nu}$ и связность $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ считаются независимыми можно найти в [5].

Вычисление алгебры связей

Для удобства вычислений удобно трёхмерную скаларную связь $T(\mathbf{x})$ свернуть с произвольным трёхмерным скалярным полем, а векторную $T_a(\mathbf{x})$ — с произвольным векторным полем

$$T[\varphi] = \int d^3\mathbf{x}\,\varphi(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) \tag{8.15}$$

$$T[\xi^a] = \int d^3\mathbf{x}\,\xi^a(\mathbf{x})T_a(\mathbf{x}) \tag{8.16}$$

Теперь найдём следующие величины

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T[\varphi]}{\delta\gamma_{ab}(\mathbf{x})} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(2\pi^{ca}\pi^{b}_{c} - \pi\pi^{ab})\varphi \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{\gamma}}\gamma^{ab}(2\pi^{cd}\pi_{cd} - \pi^2)\varphi \\
&\quad + \sqrt{\gamma}\big(R^{(3)ab} - \tfrac{1}{2}\gamma^{ab}R^{(3)}\big)\varphi \\
&\quad + \sqrt{\gamma}\big(\gamma^{ab}\varphi^{;c}_{;c} - \varphi^{;ab}\big) \qquad (8.17)\\
\frac{\delta T[\varphi]}{\delta\pi^{ab}(\mathbf{x})} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(2\pi_{ab} - \gamma_{ab}\,\pi)\varphi \qquad (8.18)\\
\frac{\delta T[\xi^a]}{\delta\gamma_{ab}(\mathbf{x})} &= 2\pi^{c(a}\xi^{b)}_{;c} - (\pi^{ab}\xi^{c})_{;c} \qquad (8.19)\\
\frac{\delta T[\xi^a]}{\delta\pi^{ab}(\mathbf{x})} &= 2\xi_{(a;b)} \qquad (8.20)
\end{aligned}$$

Скобка Пуассона для произвольных величин A и B в теории гравитации определяется следующим образом

$$\{A, B\} = \int d^3\mathbf{x}\left(\frac{\delta A}{\delta\gamma_{ab}(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\pi^{ab}(\mathbf{x})} - \frac{\delta A}{\delta\pi^{ab}(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\gamma_{ab}(\mathbf{x})}\right) \qquad (8.21)$$

Используя найденные выше вспомогательные величины, найдём скобки Пуассона для связей

$$\{T[\varphi], T[\psi]\} = T[\varphi\psi^{;a} - \psi\varphi^{;a}] \qquad (8.22)$$

$$\{T[\xi^a], T[\varphi]\} = T[\xi^a\varphi_{;a}] \qquad (8.23)$$

$$\{T[\xi^a], T[\eta^a]\} = 2\pi^{ab}_{;b}\,(\eta^c\xi_{a;c} - \xi^c\eta_{a;c}) = T[\xi^c\eta^a_{;c} - \eta^c\xi^a_{;c}] \qquad (8.24)$$

Если теперь взять в качестве произвольных скалярных и векторных полей δ-фунцкции, то получим скобки Пуассона для связей, которые были приведены в предыдущем разделе (8.13).

Контрольные вопросы

1. Что называется функцией хода?

2. Что называется функцией сдвига?

3. Получите соотношение (8.2).
4. Получите соотношения (8.4).
5. Получите соотношения (8.17)–(8.20).

Список литературы

1. Гитман, Д. М. Каноническое квантование полей со связями / Д. М. Гитман, И. В. Тютин.— Москва: Наука, 1986.— 216 с.
2. Бухбиндер, И. Л. Модели теории поля / И. Л. Бухбиндер. — Томск: Издательство ТГПУ, 2012. — 72 с.
3. Славнов, А. А. Ведение в квантовую теорию калибровочных полей / А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 272 с.
4. Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, S. W. The dynamics of general general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: an introduction to current research*, New York – London, 1962. John Wiley & Sons, Inc. gr-qc/0405109.
5. Фаддеев, Л. Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна / Л. Д. Фаддеев // Успехи физических наук — 1982. — Т. 136. — С. 435–457.
6. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва: Физматлит, 2004. — 224 с.
7. Коноплёва, Н. П. Калибровочные поля / Н. П. Коноплёва, В. Н. Попов. — Москва: Атомиздат, 1972. — 240 с.
8. Прохоров, Л. В. Гамильтонова механика калибровочных систем / Л. В. Прохоров, С. В. Шабанов. — Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1997. — 292 с.
9. Henneaux, Marc Quantization of Gauge Systems / Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. — Princeton, Princeton University Press, 1992. —520 p.
10. Rothe, H. J. Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian system / Heinz J. Rothe & Klaus D. Rothe. — World Scientific, 2010. — 302 p.
11. Deriglazov, A. Classical Mechanics / A. Deriglazov. — Springer, 2010. — 308 p.

Учебное издание

Крыхтин Владимир Алексеевич

Гамильтоновы системы со связями

Учебное пособие

Технический редактор: Г. В. Белозёрова
Ответственный за выпуск: Л. В. Домбраускайте

Бумага: офсетная. Печать: трафаретная. Формат: 60×84¹⁄₁₆. Тираж: 500 экз.
Сдано в печать: 18.06.2018. Усл. печ. л.: 2,6 . Уч. изд. л.: 2,3. Заказ: 1379/у

9 785894 288628

Издательство Томского государственного
педагогического университета
634061, г. Томск, ул. Киевская, 60
Отпечатано в типографии Издательства ТГПУ
г. Томск, ул. Герцена, 49. Тел.: (3822) 311–484
E-mail: tipograf@tspu.edu.ru