МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Томский государственный педагогический университет»
(ТГПУ)

Ю. В. Богданова

Физика: обработка результатов измерений

учебно-методическое пособие

Томск 2018

ББК 22.3я73
УДК
Б 73

Печатается по решению
Учебно-методического совета
Томского государственного
педагогического университета

Б 73 Богданова, Ю. В. Физика: обработка результатов измерений : учебно-методическое пособие / Ю. В. Богданова. – Томск : Издательство Томского государственного педагогического университета, 2018. – ____ с.

Пособие представляет собой руководство по обработке результатов измерений. Первая часть пособия содержит краткую информацию о погрешностях измерений, о подборе параметров линейной зависимости по экспериментальным данным и по линеаризации зависимостей. Вторая часть описывает технологии расчетов в табличных процессорах MicroSoft Excel и LibreOffice Calc. Информации, изложенной в пособии достаточно, чтобы запрограммировать необходимые формулы самостоятельно или воспользоваться готовыми решениями для обработки физических данных.

Пособие в первую очередь предназначено для обучающихся по направлению подготовки Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) профили Математика и Физика в качестве дополнительной информации при подготовке к выполнению лабораторных работ по дисциплине Общая физика. Пособие также будет полезно для студентов других направлений, изучающих физику.

Рецензент: С.Г.Катаев, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой общей физики ФМФ Томского государственного педагогического университета

ББК 22.3я73

Содержание

Предисловие

Обработка результатов измерений – часть экспериментальной работы, которая предполагает проведение вычислений для определения искомой (измеряемой) величины или функциональных зависимостей между заданными величинами. В ходе выполнения лабораторных работ обучающиеся могут воспользоваться калькулятором для проведения вычислений вручную или компьютером с табличным процессором. Современные табличные процессоры (MicroSoft Excel и LibreOffice Calc) позволяют быстро и практически автоматически проводить рутинные процедуры вычисления, опираясь на функции для анализа данных, более того они позволяют исследовать функциональные зависимости (метод наименьших квадратов). Таким образом, использование табличных редакторов при выполнении лабораторных работ по физике позволит сократить время арифметических расчетов и провести качественную обработку полученных экспериментальных данных.

Необходимая теоретическая информация (элементы теории измерений) приведена в первом разделе данного пособия. Вторая его часть содержит описание технологий обработки и представления данных с помощью табличных редакторов различных версий. Пособие можно использовать для обучения перед началом цикла лабораторных работ и как справочное руководство при выполнении расчетов для обработки результатов измерений по каждой лабораторной работе.

Пособие в первую очередь предназначено для обучающихся по направлению подготовки Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) профили Математика и Физика. Пособие также будет полезно для студентов других направлений, изучающих физику. Описанные технологии могут использоваться во всех лабораторных работах. Желательно их использовать при косвенных измерениях и измерениях коэффициентов функциональной связи.

Измерения и погрешности

Измерить физическую величину – это значит узнать, сколько раз заключается в ней однородная величина, принятая за единицу измерения. Произвести измерения абсолютно точно невозможно, т.к. нет идеального экспериментатора (возникают случайные погрешности), нет идеальных приборов (возникают приборные погрешности), нет идеальных условий эксперимента (возникают систематические ошибки). Случайная и приборная погрешность (неопределенность) приводит к возможному отклонению результата измерения как в большую, так и в меньшую сторону. Систематические ошибки обычно приводят к сдвигу результата в определенную сторону и могут быть определены и учтены при построении модели эксперимента. Приборные и случайные погрешности исключить невозможно, но их минимизируют подходящими по точности приборами и выбором количества повторений измерений. Заинтересовавшимся метрологией – наукой об измерениях, советуем почитать учебник И.Ф. Шишкина [1].

Прямые измерения, приборная погрешность и правила округления

Первая аксиома метрологии: *без априорной информации измерение невозможно*, предполагает, что приблизительное значение измеряемой величины известно, равно как и класс точности прибора. Вторая аксиома метрологии определяет, что такое измерение: *измерение суть сравнение размеров опытным путём*. Прямое измерение производится с помощью инструментов и приборов. Таким образом, измерение – это уточнение числового значения величины. При подготовке лабораторного оборудования, инженеры подбирают необходимые приборы, поэтому студентам остается только провести измерение и оценить погрешность измерений.

Правило для оценки приборной погрешности следующее: если погрешность не указана на приборе, то при измерении с помощью прибора со шкалой, за погрешность измерения принимают половину *цены деления*, а для цифрового прибора – *последнюю значащую цифру*. Результат измерения записывается как «число» $\pm$ «абсолютная погрешность»: $\hat{x} \pm \Delta x$, где $\hat{x}$ – оценка измеряемой величины. Запись результата измерения должна иметь размерность, в качестве которой могут использоваться размерности СИ или внесистемные единицы.

Иногда удобнее использовать безразмерную *относительную погрешность*: $\varepsilon = \Delta x / \hat{x}$, или относительную погрешность в процентах: $\varepsilon_{\%} = 100\% \cdot \Delta x / \hat{x}$. Обратим внимание, что относительная погрешность зависит не только от цены деления прибора, но и от значения измеряемой величины. Максимальная относительная погрешность обычно указывается на приборах. Результат измерения через относительную погрешность записывается как «число» $\pm$ «относительная погрешность в процентах»: $\hat{x} \pm \varepsilon_{\%}$.

При записи результата измерения имеет смысл записывать ограниченное число значащих цифр, воспользовавшись правилами округления. Это позволит отбросить бесполезную информацию. В первую очередь округляем абсолютную погрешность измерения, оставляя одну (если она больше 2) или две (если первая цифра равна 1 или 2) значащие цифры, пользуясь обычными правилами:

- если следующая за оставленной цифрой меньше 5, то низшие разряды отбрасываются;
- если следующая за оставленной цифрой больше или равна 5, то низшие разряды отбрасываются, а к последней значащей цифре добавляют 1.

Далее округляют значение измеренной величины также по правилам округления, оставляя столько же разрядов, сколько и в погрешности.

Следует отметить, что дописывание нулей после запятой неприемлемо для результатов измерений. Хотя для математики 8,0 и 8 – одинаковые числа, для физики это не так: последняя значащая цифра, в том числе и ноль, показывает точность результата измерения. При необходимости к значению и к погрешности измерения (только вместе) можно добавлять множители с 10 в степени кратной 3 (так принято) или общеизвестные приставки к единицам измерения. В таблице 1 приведены примеры округления и правильной записи результатов измерений (размерности опущены). Проверьте понимание алгоритма округления результата измерения.

Таблица 1. Примеры округления и записи результатов измерений

№	Результат измерения	Запись через абсолютную погрешность	Запись через относительную погрешность
1	$\hat{x} = 1234{,}5$ $\Delta x = 6{,}789$	1235 ± 7	$1235 \pm 0{,}6\%$
2	$\hat{x} = 1234{,}5$ $\Delta x = 67{,}89$	$(1{,}23 \pm 0{,}07) \cdot 10^3$	$1{,}23 \cdot 10^3 \pm 0{,}6\%$
3	$\hat{x} = 56789$ $\Delta x = 1234$	$(56{,}8 \pm 1{,}2) \cdot 10^3$	$56{,}8 \cdot 10^3 \pm 2\%$

Важно: при использовании результатов прямых измерений для расчета косвенных измерений, необходимо оставить 2-3 знака в погрешности прямых измерений, чтобы округлением не вносить дополнительной погрешности.

Косвенные измерения, расчет погрешности

Прямые измерения многих физических величин не доступны. В таких случаях экспериментально определить физическую величину можно через косвенное измерение, которое заключается в измерении нескольких величин с последующим вычислением искомой. Пусть измеряемая физическая величина y связана некоторой функциональной зависимостью с измеряемыми напрямую величинами $x_1, x_2, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, и пусть измеренные величины равны $\hat{x}_i \pm \Delta x_i$. Тогда значение искомой величины будет равно значению функции при измеренных аргументах: $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$.

Погрешность измерения величины y можно оценить через частные производные функции f при $x_i = \hat{x}_i : \Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i' \Delta x_i)^2}$, где $f_i' = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = \hat{x}_i}$.

В качестве упражнения можно вывести формулы для расчета погрешности косвенных измерений для часто встречающихся математических функций и проверить результат по таблице 2.

Таблица 2. Некоторые формулы для определения погрешности косвенных измерений

№	Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
1	$y = x_1 + x_2$	$\Delta y = \sqrt{\Delta x_1^{\ 2} + \Delta x_2^{\ 2}}$	$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{\Delta x_1^{\ 2} + \Delta x_2^{\ 2}}}{\lvert x_1 + x_2 \rvert}$
2	$y = x_1 \cdot x_2$	$\Delta y = \sqrt{(\Delta x_1 \cdot x_2)^2 + (\Delta x_2 \cdot x_1)^2}$	$\varepsilon_y = \sqrt{\varepsilon_1^{\ 2} + \varepsilon_2^{\ 2}}$
3	$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \sqrt{\frac{(\Delta x_1 \cdot x_2)^2 + (\Delta x_2 \cdot x_1)^2}{x_2^4}}$	$\varepsilon_y = \sqrt{\varepsilon_1^{\ 2} + \varepsilon_2^{\ 2}}$
4	$y = tg\, x_1$	$\Delta y = \frac{\Delta x_1}{\cos^2 x_1}$	$\varepsilon_y = 2\frac{\Delta x_1}{\lvert \sin 2x_1 \rvert}$
5	$y = x_1^{\ z}$	$\Delta y = \lvert z\, x_1^{\ z-1} \rvert \Delta x_1$	$\varepsilon_y = \lvert z \rvert \varepsilon_1$
6	$y = z^{x_1}$	$\Delta y = \lvert z^{x_1} \ln z \rvert \Delta x_1$	$\varepsilon_y = \lvert \ln z \rvert \Delta x_1$
7	$y = \ln x_1$	$\Delta y = \varepsilon_1$	$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1}{\lvert \ln x_1 \rvert}$

Случайная погрешность, оценка доверительного интервала

Третья аксиома метрологии: *результат измерения без округления является случайным* предопределяет, что математическим аппаратом метрологи является теория вероятностей и математическая статистика. Проводя измерения многократно, можно оценить погрешность конкретных измерений, проводимых в данном месте, в данное время, определенным экспериментатором. Такая погрешность называется *случайной* или статистической.

Представим, что можно было бы провести бесконечное число измерений некоторой физической величины x, тогда мы могли бы получить множество значений случайной величины $\{x_1, x_2, ..., x_\infty\}$, которое в статистике называется генеральной совокупностью. Перебрать все значения генеральной совокупности, чтобы оценить истинное среднее значение a, обычно, невозможно. Поэтому возникает статистическая задача: оценить a по конечной выборке $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$, т.е. по набору из N значений, выбранных случайным образом из генеральной совокупности.

Путь дисперсия генеральной совокупности равна σ^2. В качестве оценки истинного среднего $\hat{a}$ примем x_1. Таким образом, в выборке только одно значение, оно выбрано случайно из генеральной совокупности. Это означает, что измерение проведено однократно. Математическое ожидание оценки $\hat{a}$ равно математическому ожиданию x_1, которое равно истинному a: $E(\hat{a}) = E(x_1) = a$. Это значит, что такая оценка является несмещенной. И может устроить экспериментатора. Более того, дисперсия оценки совпадает с дисперсией генеральной совокупности: $V(\hat{a}) = V(x_1) = \sigma^2$. Итак, однократное измерение может быть оценкой истинного значения, при этом дисперсия оценки совпадает с дисперсией генеральной совокупности.

Увеличим количество элементов в выборке: пусть $N = n > 1$. Это означает, что проведено n независимых измерений в одинаковых условиях. В качестве оценки истинного среднего примем среднее арифметическое всех элементов выборки. Оценим математическое ожидание и дисперсию такой оценки:

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;\; E(\hat{a}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n} n\,a = a\,;\; V(\hat{a}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(x_i) = \frac{1}{n^2} n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

Итак, дисперсия оценки уменьшается с увеличением количества элементов в выборке или с увеличением количества измерений, т.е. точность оценки по выборке оказывается выше единичного наблюдения. Дисперсия генеральной совокупности, как правило, неизвестна. Для ее оценки воспользуемся дисперсией выборки: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2$.

Если $\hat{a}$ имеет нормальное распределение, то относительное отклонение оценки от истинного значения $\frac{\hat{a}-a}{s/\sqrt{n}}$ имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы n-1: $t(n-1)$. Последнее позволяет утверждать, что с доверительной вероятностью $1-\alpha$ случайная величина $\frac{\hat{a}-a}{s/\sqrt{n}}$ принадлежит интервалу $\{-t_{\alpha/2}(n-1), +t_{\alpha/2}(n-1)\}$, или ее модуль не превышает $t_{\alpha/2}(n-1)$: $\left|\frac{\hat{a}-a}{s/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)$. Тогда отклонение оценки от истинного значения $|\hat{a}-a| < \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$. Значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha/2}(n-1)$ можно найти в справочниках или посчитать в табличном процессоре (стр. 13, рис. 2). Как видно из обозначения, коэффициент Стьюдента зависит от уровня значимости α и количества измерений. Обычно в таблицах приведены значения коэффициентов для количества степеней свободы от 1 до 100 для уровней значимости 0.5, 0.1 и 0.01.

Подытоживая вышесказанное, выпишем формулы для расчета результата измерения и оценки его случайной погрешности при многократных измерениях в таблице 3.

Таблица 3. Формулы для определения случайной погрешности измерений

№	Наименование	Формула
1	Результат измерения величины $\hat{x}$ (эксперимент проведен n раз)	$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
2	Среднеквадратичное отклонение измерений от результата s	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2$
3	Погрешность измерения Δx, определенная для уровня значимости α	$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$
4	Интервал, в котором с вероятностью $1-\alpha$ находится истинное значение	$\{\hat{x}-\Delta x, \hat{x}+\Delta x\}$; $x = \hat{x} \pm \Delta x$

Приборная погрешность при прямых или косвенных измерениях зависит от оборудования и не может быть изменена студентом. Статистическая погрешность зависит от количества измерений и существенно уменьшается с увеличением количества измерений. Общая погрешность определяется квадратичным суммированием приборной Δz_1 и статистической Δz_2 погрешностей: $\Delta z = \sqrt{\Delta z_1{}^2 + \Delta z_2{}^2}$. Чтобы уменьшить суммарную погрешность увеличивают количество измерений до тех пор, пока статистическая погрешность не будет много меньше приборной, например в 10 и более раз раз: $\Delta z_2/\Delta z_1 \geq 10$. Тогда случайной погрешностью можно пренебречь и погрешность измерений будет определяться только приборной погрешностью: $\Delta z = \Delta z_1$.

Исследование зависимостей (парная линейная регрессия)

В случаях, когда необходимо исследовать функциональную зависимость или экспериментально определить коэффициент пропорциональности между двумя измеряемыми физическими величинами, для расчетов значений и погрешностей измерений можно использовать регрессионный анализ и метод наименьших квадратов.

Путь некоторая физическая величина y линейно зависит от величины x: $y(x) = k\,x + b$. Проведем n парных измерений y и x, получив двумерную выборку значений (y_i, x_i). Построим график $y_i(x_i)$, чтобы убедиться в возможности линейной аппроксимации и воспользуемся методом наименьших квадратов чтобы определить параметры k и b, при которых сумма квадратов остатков Q_e, т.е. суммы квадратов отклонений измеренных значений y_i от расчетных значений $\hat{y}_i = k\,x_i + b$, минимальна: $Q_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min$. Использование метода наименьших квадратов объясняется тем, что полученные с его помощью оценки являются несмещенными и имеют минимальную дисперсию среди всевозможных линейных несмещенных оценок. Формулы для расчета оценок $\hat{k}$ и $\hat{b}$ приведены в таблице 4.

Для оценки качества подбора параметров $\hat{k}$ и $\hat{b}$ определим коэффициент детерминации парной линейной регрессии R^2, сокращенно называемый «R-квадрат». Соберем общую сумму Q_{tot} квадратов отклонений измеренных y_i от среднего значения $\langle y_i \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$: $Q_{tot} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \langle y_i \rangle)^2$. Представим общую сумму квадратов в виде двух слагаемых: $Q_{tot} = Q_{reg} + Q_e$, где $Q_{reg} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \langle y_i \rangle)^2$ – отклонение, связанное с зависимостью y от x. Отметим, что каждое из слагаемых представляет сумму квадратов и является положительным числом. Приведем правую часть к единице, поделив выражение на Q_{tot}: $1 = \frac{Q_{reg}}{Q_{tot}} + \frac{Q_e}{Q_{tot}}$ и определим коэффициент детерминации $R^2 = \frac{Q_{reg}}{Q_{tot}} = 1 - \frac{Q_e}{Q_{tot}}$. Таким образом, коэффициент детерминации – это доля объясненной дисперсии. Чем лучше модель, тем ближе коэффициент детерминации к единице. Значение R^2 используется как один из критериев качества аппроксимации.

Еще одним критерием качества модели являются доверительные интервалы для параметров зависимости (в нашем случае для k и b), рассчитываемые, как и случайная погрешность через коэффициенты Стьюдента, но с числом степеней свободы $n-2$. Формулы приведены в таблице 4, в них используются обозначения для среднего значения и дисперсии выборки измеренных значений физической величины x: $\langle x_i \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $Q_x = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x_i \rangle\right)^2$.

Таблица 4. Формулы для определения параметров парной регрессии $y(x) = k\,x + b$

№	Наименование	k	b
1	Оценка параметра	$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x_i \rangle\right)\left(y_i - \langle y_i \rangle\right)}{Q_x}$	$\hat{b} = \langle y_i \rangle - \hat{k} \cdot \langle x_i \rangle$
2	Среднеквадратичное отклонение	$s_k^2 = \frac{Q_e}{Q_x}$	$s_b^2 = Q_e\left(\frac{1}{n} + \frac{\langle x_i \rangle^2}{Q_x}\right)$
3	Погрешность параметра, определенная для уровня значимости α	$\Delta k = \frac{s_k}{\sqrt{n-2}} t_{\alpha/2}(n-2)$	$\Delta b = \frac{s_b}{\sqrt{n-2}} t_{\alpha/2}(n-2)$
4	Интервал, в котором с вероятностью $1-\alpha$ находится истинное значение параметра	$\left\{\hat{k} - \Delta k, \hat{k} + \Delta k\right\}$; $k = \hat{k} \pm \Delta k$	$\left\{\hat{b} - \Delta b, \hat{b} + \Delta b\right\}$; $b = \hat{b} \pm \Delta b$

Линеаризация функциональных зависимостей

К нелинейным функциям также можно применить метод наименьших квадратов, но решение нелинейной минимизационной задачи содержит множество трудностей, поэтому при возможности прибегают к линеаризации функции и использованию линейных аппроксимаций. Линеаризация – преобразование функции, через замену переменных приводящее нелинейную функцию к линейной. Типичные преобразования показаны в таблице 5.

После подбора замены переменных для нелинейной функции выборка значений (y_i, x_i) пересчитывается по правилу замены в выборку значений (y_{1_i}, x_{1_i}) и уже для новых переменных строится оценка параметров k и b. Следует отметить, что в этом случае оценки параметров получаются не из условия минимизации суммы квадратов отклонений для исходной переменной, а из условия минимизации суммы квадратов отклонений для новых переменных, что требует дополнительных исследований оценок при проведении реальных экспериментов. При проведении лабораторных работ дополнительных исследований не требуется.

Таблица 5. Примеры преобразования нелинейных функций

№	Исходная функция	Линейная функция	Замена переменных
1	$y = a e^{k x}$	$y_1 = k x + b$	$y_1 = \ln y$; $b = \ln a$
2	$y = k \ln x + b$	$y = k x_1 + b$	$x_1 = \ln x$
3	$y = \dfrac{1}{b + k x}$	$y_1 = k x + b$	$y_1 = \dfrac{1}{y}$
4	$y = \dfrac{x}{k + b x}$	$y_1 = k x_1 + b$	$y_1 = \dfrac{1}{y}$; $x_1 = \dfrac{1}{x}$

Технологии MicroSoft Excel (Office 2007 и более ранние версии)

Табличный процессор MicroSoft Excel (далее «редактор») позволяет сохранять данные в форме таблиц, численно преобразовывать данные, строить графики и определять линии тренда. Использование надстройки «Пакет анализа» позволяет без дополнительного программирования проводить регрессионный анализ.

Для установки пакета анализа в меню «Сервис» необходимо выбрать раздел «Надстройки…» и в появившемся окне «Доступные надстройки» поставить галочку, выбрав «Пакет анализа» (рис. 1), и нажать кнопку «ОК».

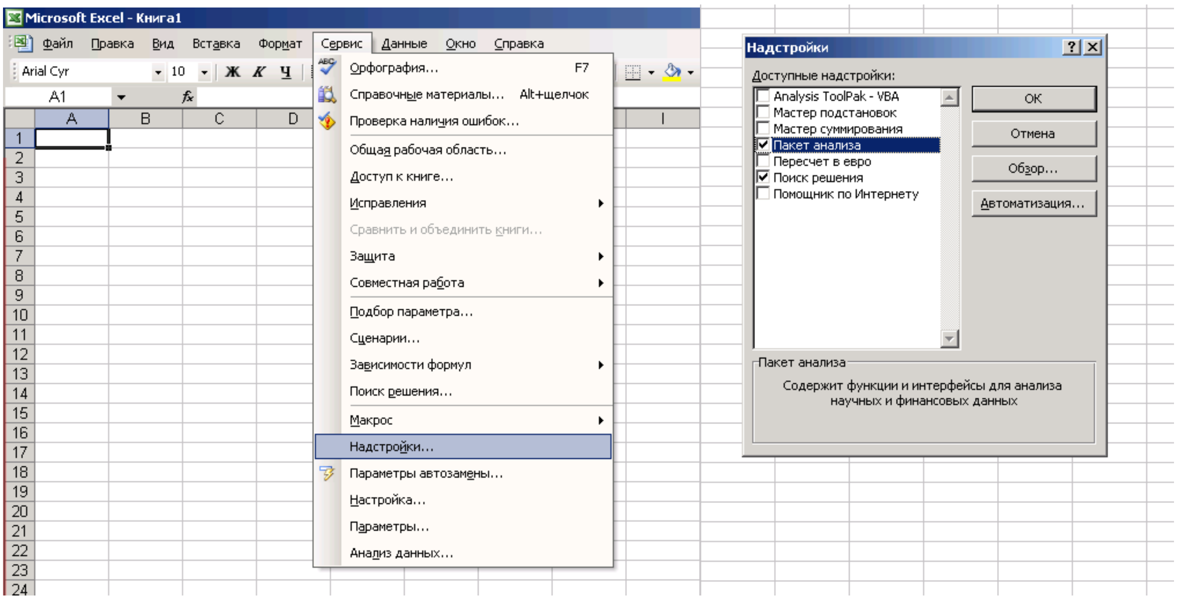
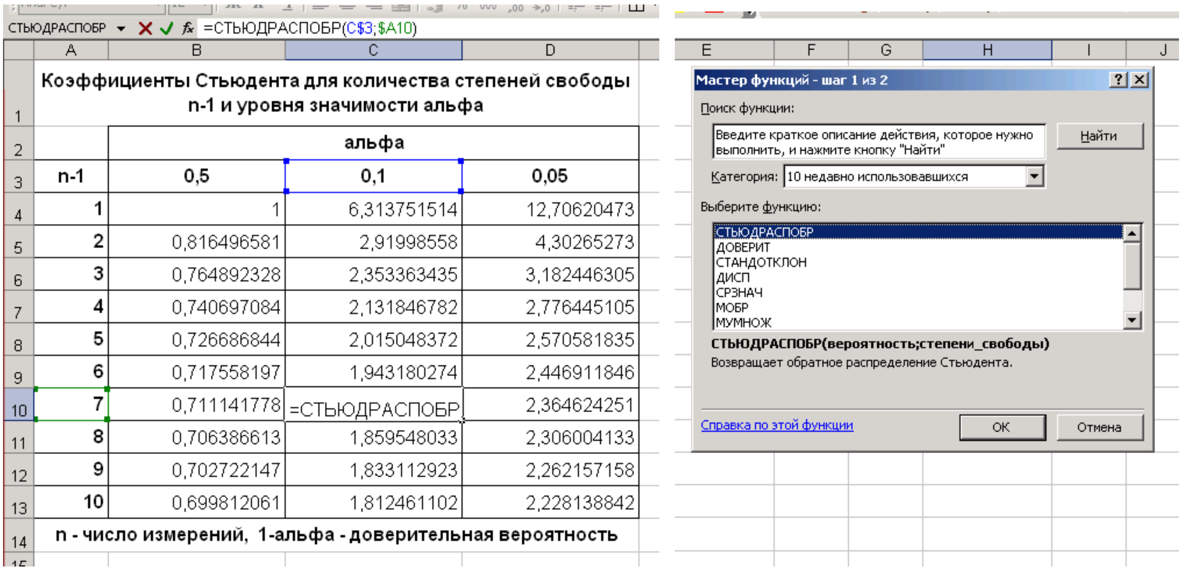


Рис. 1 Иллюстрация к установке надстройки «Пакет анализа» в MS Office 2007

Каждая ячейка таблицы имеет имя: это латинская буква столбца и номер строки. На Рисунке 1 выделена верхняя левая ячейка, ее имя A1. Она активна для редактирования. Содержимое активной ячейки выносится в строку над таблицей, называемой строкой формул. Обратите внимание, содержимое и значение ячейки могут не совпадать. Например, содержимое ячейки – это формула, значение – число. Введение формулы в ячейке начинается со знака «=». Далее используются общепринятые математические символы для арифметических действий: «+», «–», «*», «/» и множество стандартных функций, подсказка по которым (Мастер функций, рис. 2) появляется при нажатии на справку функций «fx», находящуюся слева от строки формул.

Для автоматизации вычислений используют ссылки на ячейки, которые могут быть прямыми и относительными. Относительная ссылка – это имя ячейки (например, A1): при копировании или переносе ячейки с формулой на соседние она будет изменяться, сохраняя положение в таблице относительно ячейки с формулой. Прямая ссылка – имя ячейки со знаком(ами) доллара $ (например, A1) – не изменяется при копировании или переносе формулы. Для установки знаков «$» достаточно нажать горячую клавишу на клавиатуре «F4». Многократное нажатие циклически изменяет количество знаков «$», изменяя форму ссылки на столбец и строку отдельно.



СТЬЮДРАСПОБР =СТЬЮДРАСПОБР(C$3;$A10)

Коэффициенты Стьюдента для количества степеней свободы n-1 и уровня значимости альфа

		альфа	
n-1	0,5	0,1	0,05
1	1	6,313751514	12,70620473
2	0,816496581	2,91998558	4,30265273
3	0,764892328	2,353363435	3,182446305
4	0,740697084	2,131846782	2,776445105
5	0,726686844	2,015048372	2,570581835
6	0,717558197	1,943180274	2,446911846
7	0,711141778	=СТЬЮДРАСПОБР	2,364624251
8	0,706386613	1,859548033	2,306004133
9	0,702722147	1,833112923	2,262157158
10	0,699812061	1,812461102	2,228138842

n - число измерений, 1-альфа - доверительная вероятность

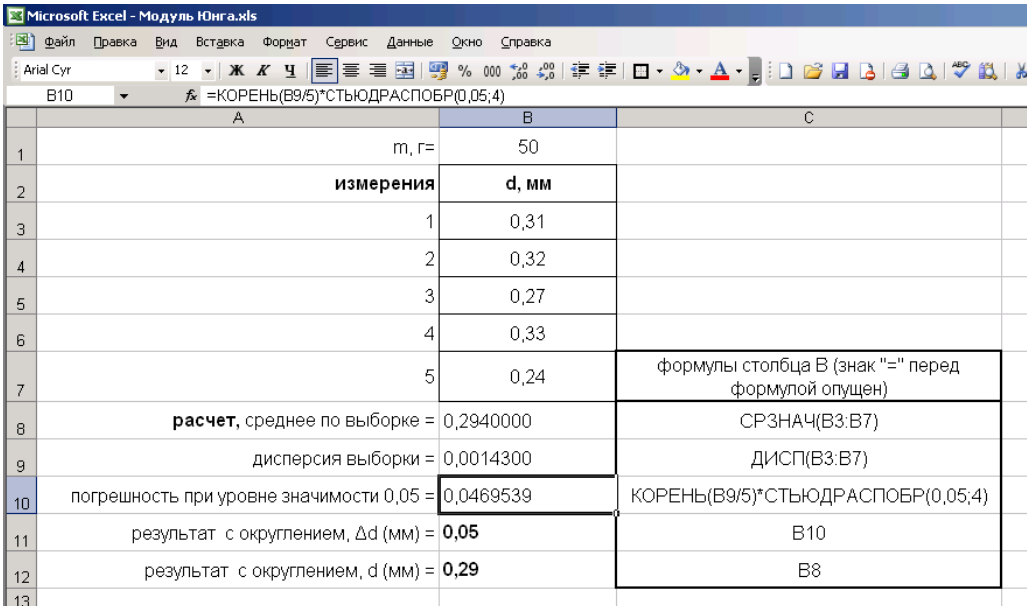
Рис. 2 Иллюстрация к способам ссылок и вызову Мастера функций

На рисунке 2 слева показана таблица коэффициентов Стьюдента, рассчитанная через функцию СТЬЮДРАСПОБР, краткое описание которой показано справа (поскольку это функция, обратная распределению Стьюдента, то «вероятность» в введенных ранее терминах означает уровень значимости). Активная ячейка C10 содержит формулу со ссылками на верхнюю строку (знак «$» фиксирует 3 строку в первом аргументе функции) и крайний левый столбец (знак «$» фиксирует букву столбца во втором аргументе функции) таблицы. Введя такую формулу в ячейку B4, ее можно «растянуть» на любые значения коэффициентов альфа и числа степеней свободы n-1, указанных в верхней строке и левом столбце.

Расчет случайных погрешностей измерений, округление результатов

Результаты серии измерений удобно занести в таблицу и сохранить в виде столбцов чисел (разделитель дробной части – запятая). Желательно в верхней строке подписать название измеряемой физической величины и указать ее размерность, как показано на рисунке 3, где приведен фрагмент расчета случайной погрешности 5-ти измерений отклонения пластины d при массе груза 50 г.

Результаты измерений внесены в ячейки 3-7 столбца B (рис. 3). Среднее значение выборки и дисперсия по выборке рассчитаны с использованием стандартных функций. Результаты представлены в ячейках B8 и B9. Исключительно для иллюстрации синтаксиса использованных функций на рисунке 3 в столбце С выписаны используемые формулы с опущенными знаками равенства. Расчет погрешности (стандартной функции для расчета погрешности по выборке в редакторе нет) проведен по формуле таблицы 3 (строка 3) с использованием стандартной функции для коэффициента Стьюдента (ячейки В10, С10).



	A	B	C
1	m, r=	50	
2	измерения	d, мм	
3	1	0,31	
4	2	0,32	
5	3	0,27	
6	4	0,33	
7	5	0,24	формулы столбца В (знак "=" перед формулой опущен)
8	расчет, среднее по выборке =	0,2940000	СРЗНАЧ(B3:B7)
9	дисперсия выборки =	0,0014300	ДИСП(B3:B7)
10	погрешность при уровне значимости 0,05 =	0,0469539	КОРЕНЬ(B9/5)*СТЬЮДРАСПОБР(0,05;4)
11	результат с округлением, Δd (мм) =	0,05	B10
12	результат с округлением, d (мм) =	0,29	B8

Рис. 3 Иллюстрация к проведению расчетов случайной погрешности

В ячейках В11 и В12 приведен результат измерения и его погрешность с учетом округления. Погрешность (ячейка В10) содержит первую значащую цифру 4 (4>2), поэтому округляем, оставляя 2 знака после запятой. Для этого, выделив ячейки В11 и В12, нажимаем правую клавишу мыши и в появившемся меню (рис. 4) выбираем «Формат ячеек». В этом меню при нажатой кнопке «Число», выбираем из Числовых форматов «Числовой» и выбираем с помощью стрелок число десятичных знаков 2. Редактор выполнит округление по общим правилам. В нашем случае результат измерения отклонения пластины можно записать так: $d = 0{,}29 \pm 0{,}05$ мм.

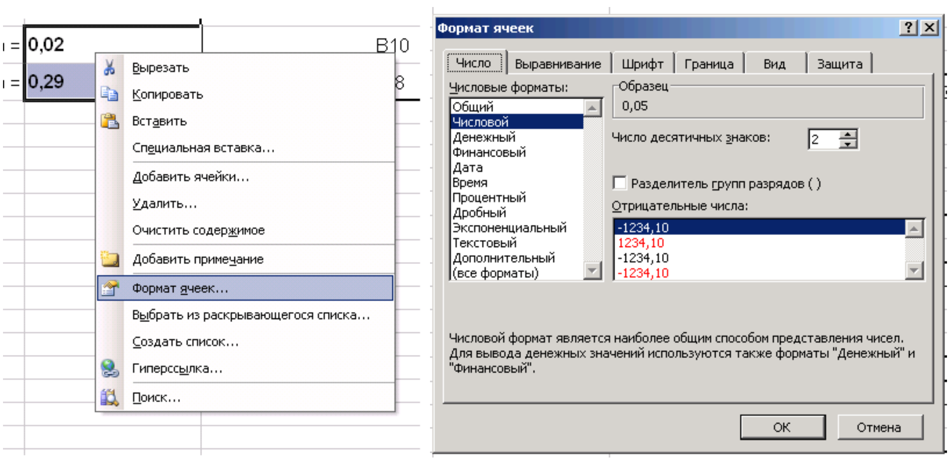
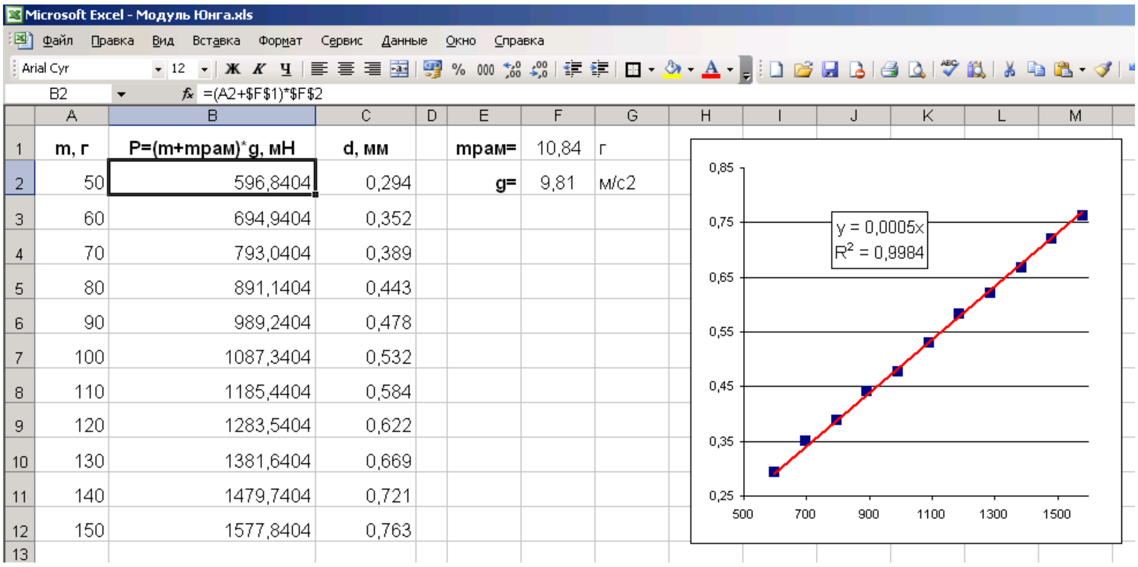


Рис. 4 Иллюстрация к округлению результатов измерения

При необходимости, формулы столбца B (ячейки B8-B12) можно «растянуть» вправо автоматически рассчитав значения и погрешности серии измерений при других условиях, которые введены в соседние столбцы (C, D и т.д.) в строки 3-7. Количество измерений должно совпадать. Другой способ определения оценки значения и погрешности измерения представлен в разделе Линейная регрессия (стр. 19).

Обработка результатов косвенных измерений

Результаты прямых измерений удобно сохранить столбцах таблицы. В соседних столбцах, через использование ссылок автоматически проводим необходимые вычисления косвенной величины. На рисунке 5 показан расчет для лабораторной работы «Модуль Юнга».


Microsoft Excel - Модуль Юнга.xls

	A	B	C	D	E	F	G
1	m, г	P=(m+mрам)*g, мН	d, мм		mрам=	10,84	г
2	50	596,8404	0,294		g=	9,81	м/с2
3	60	694,9404	0,352				
4	70	793,0404	0,389				
5	80	891,1404	0,443				
6	90	989,2404	0,478				
7	100	1087,3404	0,532				
8	110	1185,4404	0,584				
9	120	1283,5404	0,622				
10	130	1381,6404	0,669				
11	140	1479,7404	0,721				
12	150	1577,8404	0,763				

Рис. 5 Иллюстрация к вычислению значений косвенных измерений

В строке формул показано содержимое активной ячейки B2 – это формула для расчета веса грузиков и рамки (P). Обратите внимание, ссылка на соседний столбец (ячейка A2) – относительная, ссылки на значения массы рамки (ячейка F1) и ускорения свободного падения (ячейка F2) – прямая. При копировании (растягивании) этой формулы на строки 3-12 подставляются соответствующие значения массы грузов из столбца A: A3, A4, .. A12, а значения прямых ссылок не изменяются.

Построение графиков, линии тренда

Для графического представления результатов измерения используется точечная диаграмма. Для ее построения необходимо выделить столбцы значений абсцисс (Ox) и ординат (Оу), вызвать «Мастер диаграмм» (значок) в верхней строке меню, затем выбрать Тип: «Точечная» и следовать по предложенным шагам до итогового «Готово» (рис. 6). Один из возможных вариантов графика приведен на рисунке 6 справа. Это экспериментальные точки по результатам измерения веса груза и сдвига пластины (данные приведены на рис. 5).

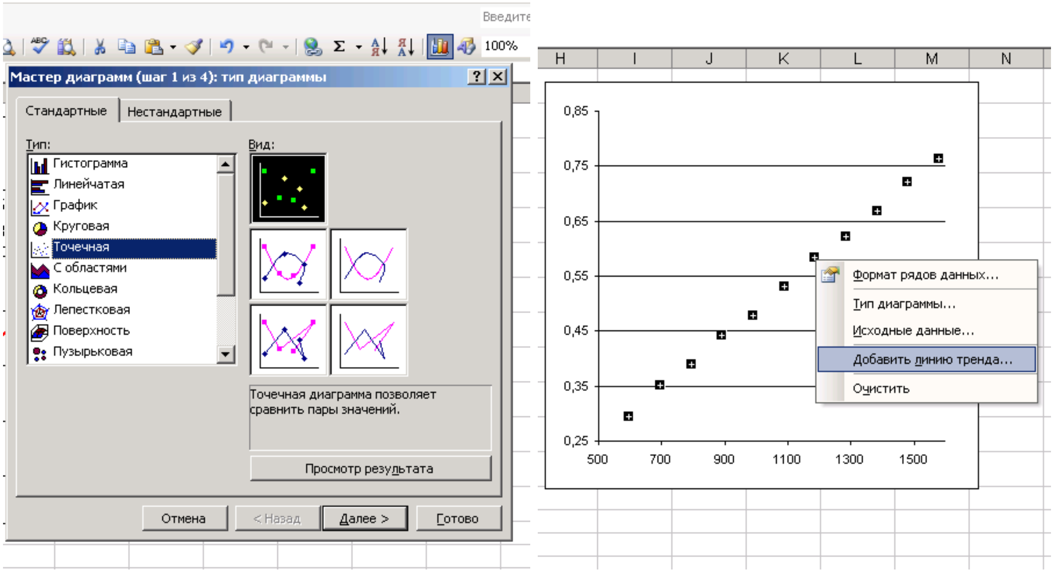


Рис. 6 Иллюстрация к построению графиков и линии тренда

Для построения линии тренда необходимо щелкнуть правой кнопкой мыши по точке на графике и в появившемся контекстном меню выбрать «Добавить линию тренда» (рис. 6). При этом откроется окно «Линия тренда». В меню «Тип» выбираем «Линейная» зависимость (рис. 7 слева) и нажимаем кнопку ОК, в меню «Параметры» отмечаем галочками «пересечение с осью Y в точке 0» (т.к. теория предполагает прямую пропорциональность между исследуемыми параметрами), «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R2)» (рис. 7 справа) и нажимаем копку «ОК».

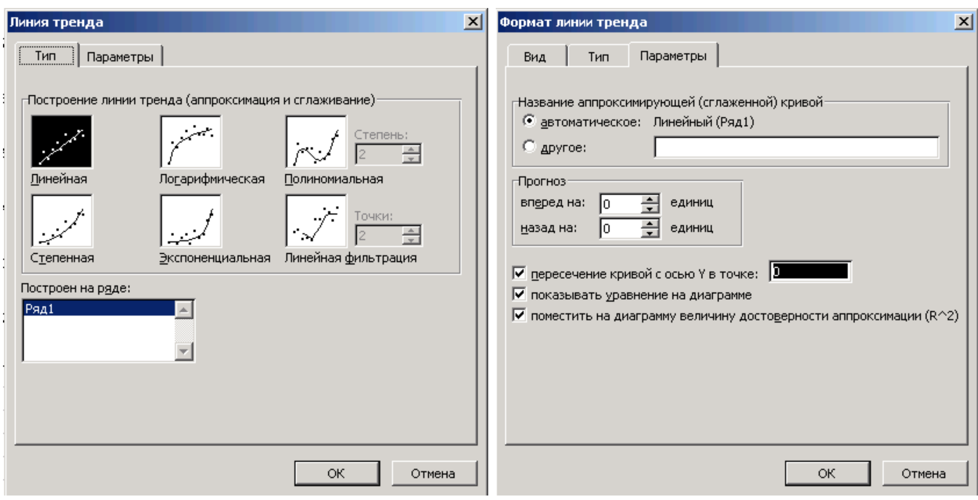


Рис. 7 Иллюстрация к построению линии тренда

В результате, как показано на рисунке 5 на диаграмме отображается линия тренда, ее уравнение и коэффициент детерминации парной линейной регрессии R^2. Сопоставив уравнение линии тренда и рабочую формулу можно рассчитать значение модуля Юнга.

Построение линейной регрессии, расчет случайной погрешности

Данные для построения регрессии необходимо сохранить в столбцах, например, как показано на рисунке 8. В меню «Сервис» выбрать «Анализ данных» и в появившемся меню среди инструментов анализа найти «Регрессия» и нажать кнопку «OK».

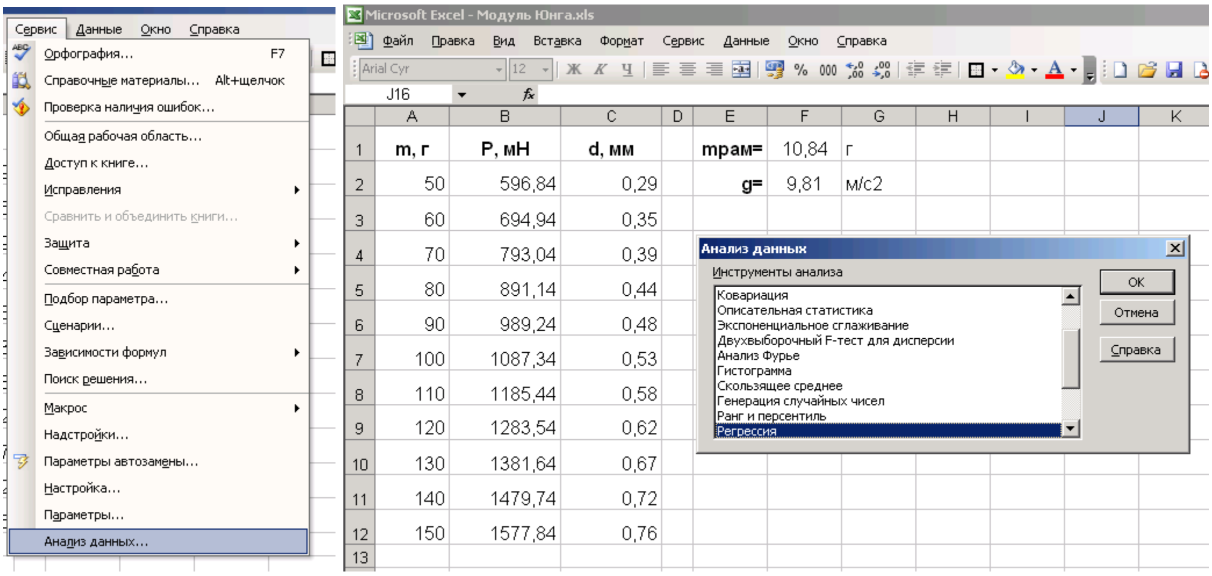


Рис. 8 Иллюстрация к запуску меню линейной регрессии

В результате откроется вкладка «Регрессия», в которой необходимо заполнить несколько полей. Чтобы ввести входной интервал Y можно щелкнуть по красной стрелке справа от поля для ввода интервала и мышкой выделить входной интервал Y (см. пунктирную линию на рис. 9), и нажать клавишу «Ввод» на клавиатуре («Enter»), ссылки на ячейки будут заполнены автоматически. Аналогично выбираем входной интервал X – это ячейки столбца B. Уровень надежности P, связанный с уровнем значимости α: $P = (1-\alpha)\cdot 100$ выставляется в процентах. В качестве «Параметров вывода» можно указать одну из ячеек текущего листа, не содержащую данных справа и снизу – это будет ячейка начала таблицы вывода результатов. После заполнения вкладки необходимо нажать кнопку «OK».

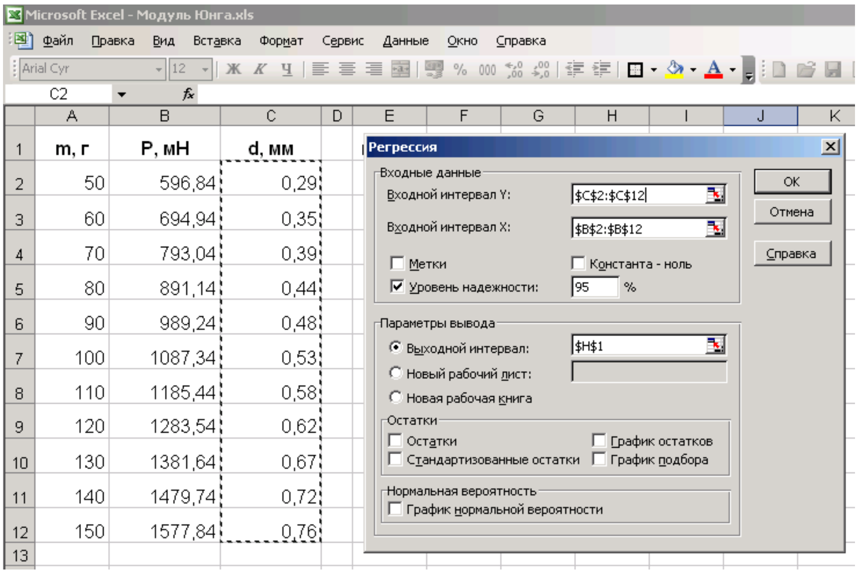


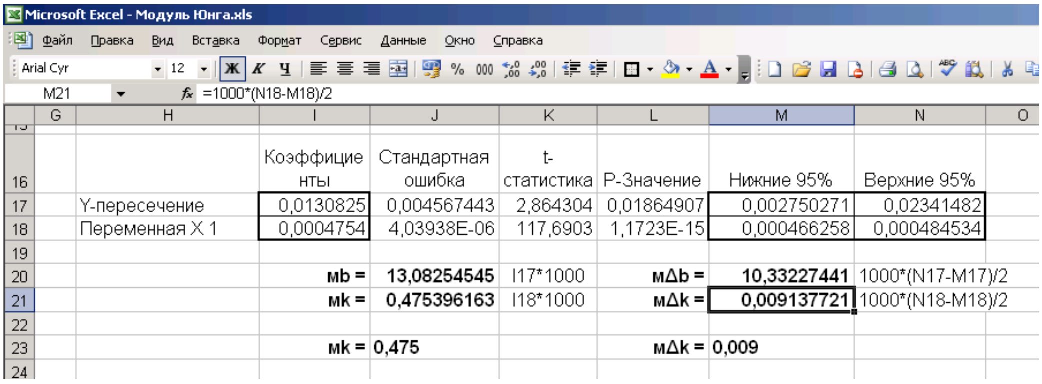
Рис. 9 Иллюстрация к построению линейной регрессии

Результаты расчета по линейной регрессии выводятся на тот же лист в форме таблицы, как показано на рисунке 10. Прежде всего, обратим внимание на значение коэффициента детерминации – вторая строка Регрессионной статистики. В приведенном примере он достаточно близок к 1, чтобы модель линейной регрессии $y = k \cdot x + b$ считать подходящей для введенных значений измерений.

H	I	J	K	L	M	N
ВЫВОД ИТОГОВ						
Регрессионная статистика						
Множественный R	0,99968					
R-квадрат	0,99935					
Нормированный R-кв	0,99928					
Стандартная ошибка	0,00416					
Наблюдения	11					
Дисперсионный анализ						
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
Регрессия	1	0,239244545	0,239245	13851	1,17233E-15	
Остаток	9	0,000155455	1,73E-05			
Итого	10	0,2394				
	Коэффи циенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
Y-пересечение	0,01308	0,004567443	2,864304	0,01864907	0,002750271	0,02341482
Переменная X 1	0,00048	4,03938E-06	117,6903	1,1723E-15	0,000466258	0,000484534

Рис. 10 Иллюстрация к выводу итогов по линейной регрессии

Параметры модели приведены в двух нижних строках вывода итогов. «Y-пересечение» – это параметр b, «Переменная X 1» – это коэффициент при переменной (параметр k). Значение этих параметров указано во втором столбце, который обведен рамкой на рисунке 11. Здесь же выделены верхняя и нижняя границы интервала, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение параметра. Для приведения этих результатов к привычному и удобному виду умножим все параметры на тысячу и добавим приставку мили (м) к названиям параметров (Ячейки J20 и J21 показывают значения, в ячейки K20 и K21 переписаны формулы без знака «=» для пояснения). Как полуразность верхней и нижней границ вычислим абсолютную погрешность оценки параметров, которую также умножим на тысячу. Результат показан в ячейках M20 и M21 (ячейки N20 и N21 содержат формулы без знака «=» для пояснения).


Microsoft Excel - Модуль Юнга.xls

M21 fx =1000*(N18-M18)/2

	G	H	I	J	K	L	M	N	O
16			Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	
17		Y-пересечение	0,0130825	0,004567443	2,864304	0,01864907	0,002750271	0,02341482	
18		Переменная X 1	0,0004754	4,03938E-06	117,6903	1,1723E-15	0,000466258	0,000484534	
19									
20			mb =	13,08254545	I17*1000	мΔb =	10,33227441	1000*(N17-M17)/2	
21			мk =	0,475396163	I18*1000	мΔk =	0,009137721	1000*(N18-M18)/2	
22									
23			мk =	0,475		мΔk =	0,009		
24									

Рис. 11 Иллюстрация к результатам анализа зависимости

Обратим внимание, что параметр b имеет погрешность (10), сравнимую с самим значением (13). Учитывая, что теория предполагает $b = 0$, сдвиг линии тренда можно объяснить погрешностью при определении массы рамки без груза (mрам – ячейка F1 в таблице рис. 5) и опустить. Значение коэффициента k и его погрешность округлим по правилам (до третьего знака, ячейки J23 и M23) и выпишем результат с учетом размерности: $k = d/P = (475 \pm 9) \cdot 10^{-6}$ Н/м. Для вычисления модуля Юнга необходимо сопоставить полученный результат с рабочей формулой и провести окончательные вычисления, которые здесь опущены.

Через построение линейной регрессии на единичную функцию можно быстро оценить значение и погрешность серии измерений, но при внесении новых данных эту процедуру необходимо повторить, т.к. автоматического пересчета результатов построения регрессии не происходит. Повторим этим способом расчет, приведенный в разделе Расчет случайных погрешностей измерений на странице 14. Для этого ячейки столбца D заполним единицами, как показано на рисунке 12 и вызовем вкладку «Регрессия». В качестве входного интервала Y выделим результаты измерений, размещенные в ячейках 3-7 столбца B, в качестве входного интервала X – ячейки 3-7 столбца D и запустим расчет, нажав кнопку «ОК».

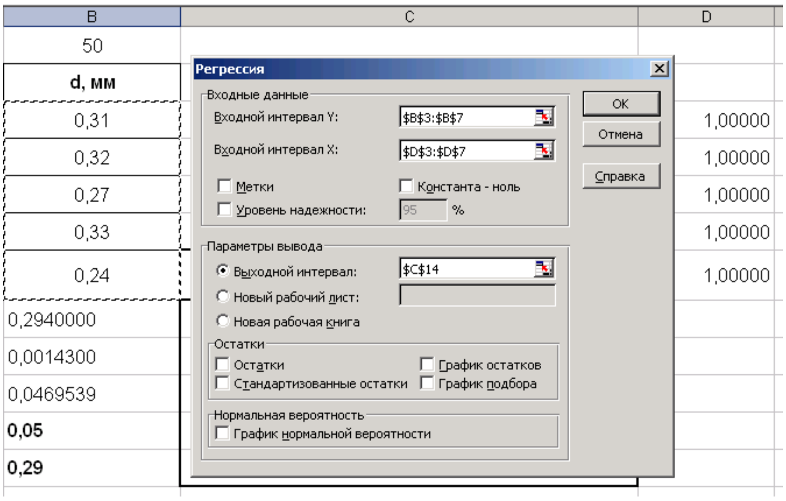


Рис. 12 Иллюстрация к расчету случайной погрешности измерений

Результаты расчета будут выведены на том же листе, как и указано в «Параметрах вывода» (рис. 12), начиная с ячейки C14 и ниже. В данном случае нас будут интересовать последние две строки вывода итогов (и совершенно не будет беспокоить нулевое значение коэффициента детерминации), которые показаны на рисунке 13. Оценка значения косвенного измерения – это коэффициент Y-пересечения (ячейка D30), верхний и нижний интервалы оценки показаны в ячейках H30 и I30. Выполним по ним расчет погрешности и округлим полученные результаты по алгоритму описанному выше. Итоги показаны в ячейках E35 и H35. Результат измерения, как и на странице 15, запишем в виде: $d = 0{,}29 \pm 0{,}05$ мм.

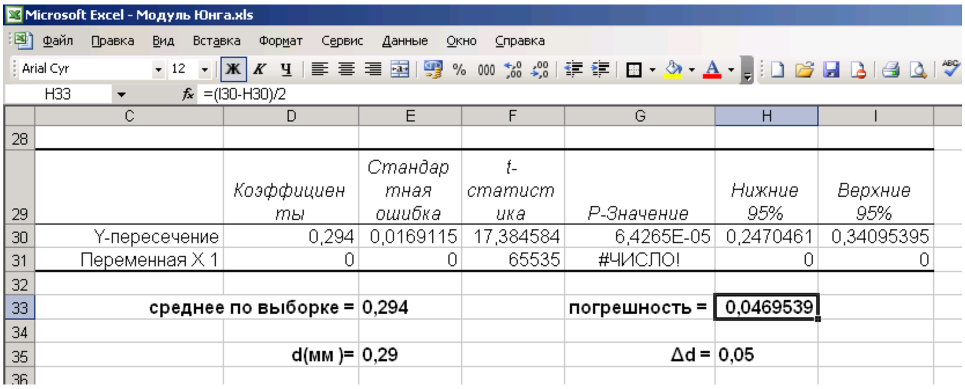


Рис. 13 Иллюстрация к результату расчета случайной погрешности измерений

***Технологии MicroSoft Excel** (Office 2010 и более поздние версии)*

Табличный процессор MicroSoft Excel (далее «редактор») позволяет сохранять данные в форме таблиц, численно преобразовывать данные, строить графики и определять линии тренда. Использование надстройки «Пакет анализа» позволяет без дополнительного программирования проводить регрессионный анализ.

Для установки пакета анализа в меню «Файл» необходимо выбрать раздел «Параметры» (рис. 14 слева, кнопка «Параметры» выделена рамкой) и в появившемся окне «Параметры Excel» (рис. 14 по центру) выбрать меню «Надстройки » (выделено цветом). В появившемся справа списке Надстроек найти «Пакет анализа».

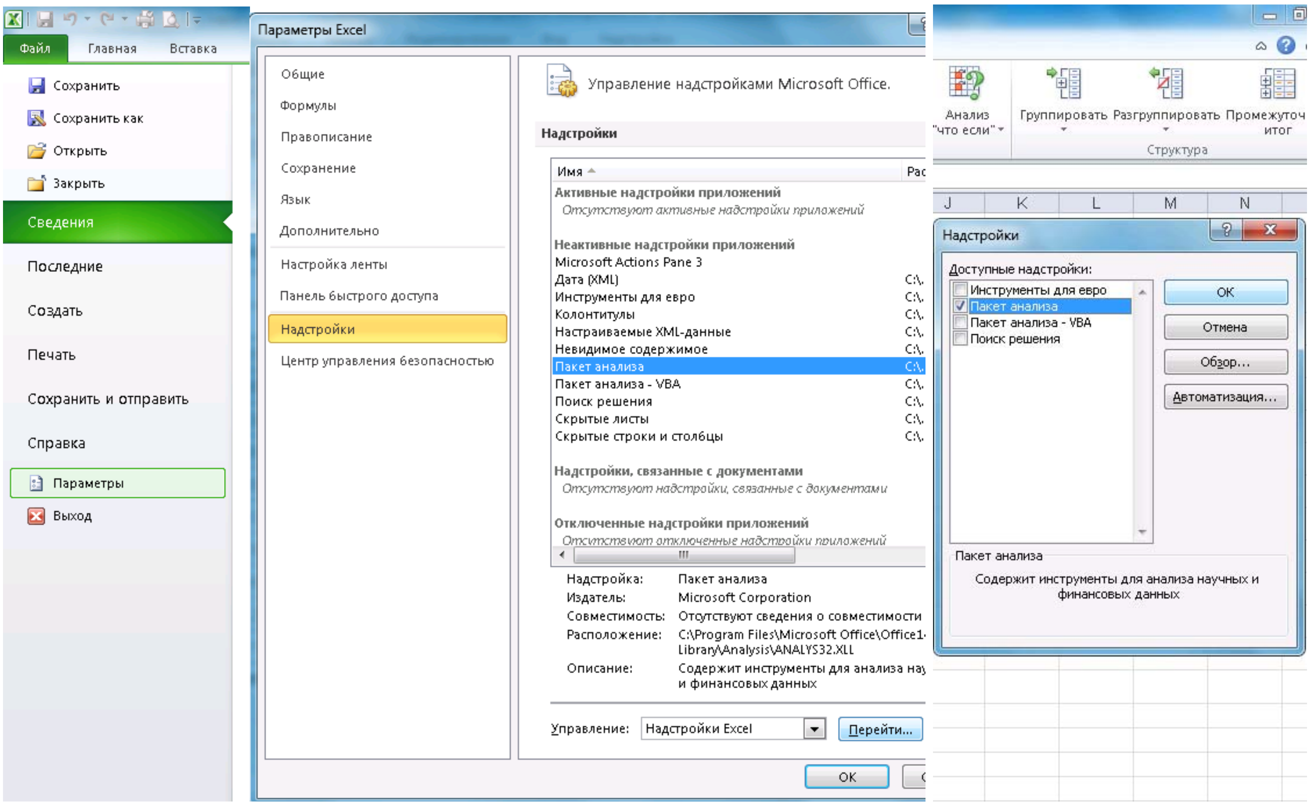


Рис. 14 Иллюстрация к выбору надстройки «Пакет анализа»

Если пакет находится в списке «Неактивные надстройки приложений» как на рисунке 14 по центру, то необходимо нажать кнопку внизу меню «Перейти» для активации надстройки. В этом случае откроется меню «Надстройки», показанное на рисунке 14 справа. В списке «Доступные надстройки» необходимо отметить галочкой «Пакет анализа» и нажать кнопку «ОК». Надстройка «Пакет анализа» станет активной и меню «Анализ данных» появится в верхней строке меню при нажатии кнопки «Данные» (рис. 15).

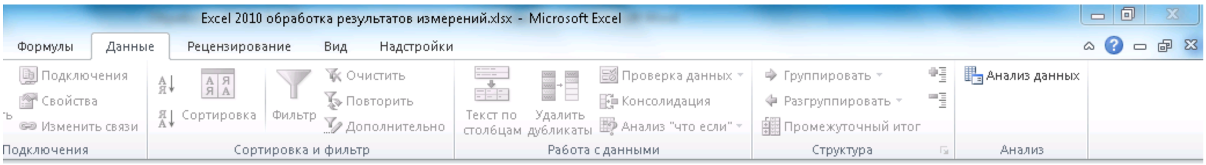


Рис. 15 Иллюстрация к результату установки надстройки «Пакет анализа»

Каждая ячейка таблицы имеет имя: это латинская буква столбца и номер строки. На Рисунке 16 выделена ячейка в среднем столбце (обведена дополнительной рамкой), ее имя C7 (столбец C и строка 7 подсвечены цветом), эта ячейка активна для редактирования. Содержимое активной ячейки выносится в строку над таблицей, называемой строкой формул. Обратите внимание, содержимое и значение ячейки могут не совпадать. Например, содержимое ячейки – это формула, значение – число. Введение формулы в ячейке начинается со знака «=». Далее используются общепринятые математические символы для арифметических действий: «+», «–», «*», «/» и множество стандартных функций, подсказка по которым («Мастер функций» на рис. 16) появляется при нажатии на справку функций «fx», находящуюся слева от строки формул.

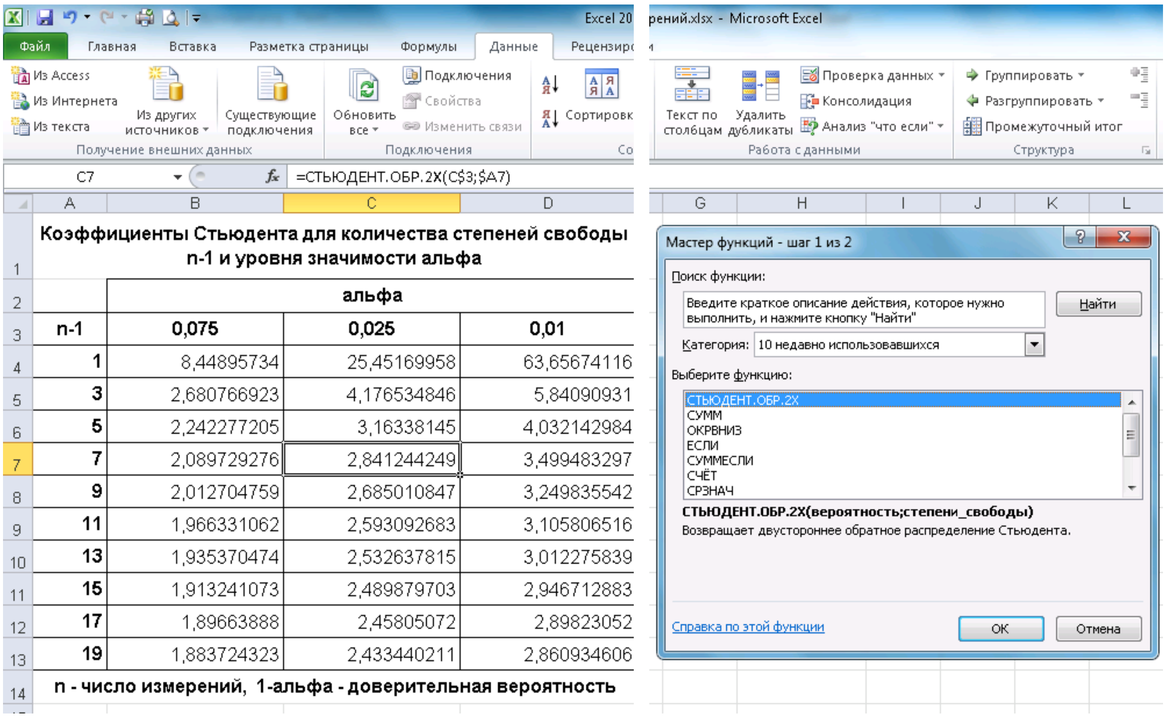


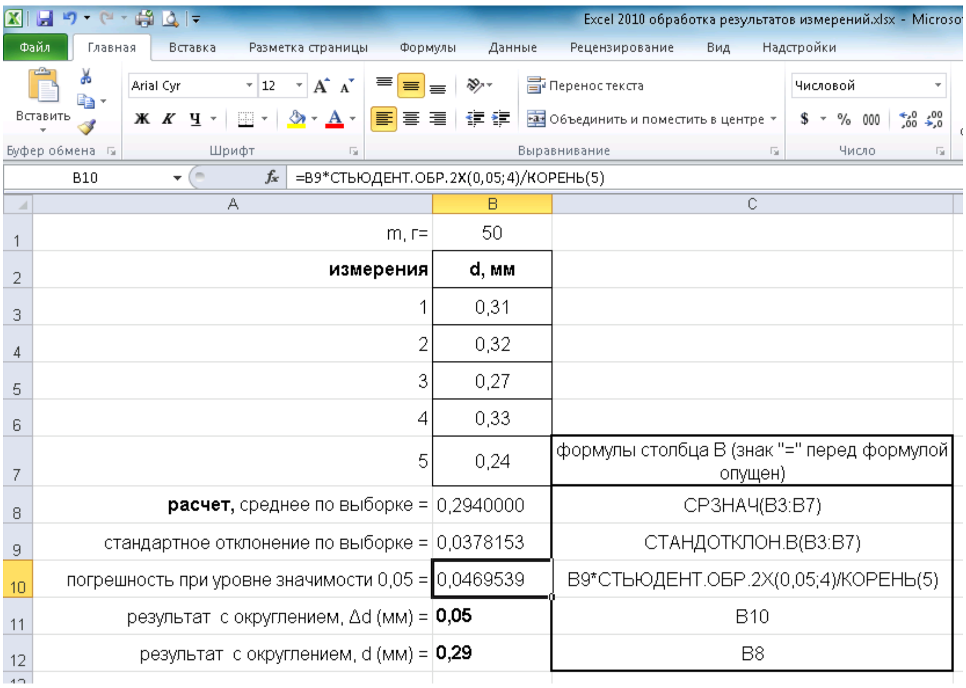
Рис. 16 Иллюстрация к способам ссылок и вызову Мастера функций

Для автоматизации вычислений используют ссылки на ячейки, которые могут быть прямыми и относительными. Относительная ссылка – это имя ячейки (например, C3): при копировании или переносе ячейки с формулой на соседние она будет изменяться, сохраняя положение в таблице относительно ячейки с формулой. Прямая ссылка – имя ячейки со знаком(ами) доллара $ (например, C$3) – не изменяется при копировании или переносе формулы. Для установки знаков «$» достаточно нажать горячую клавишу на клавиатуре «F4». Многократное нажатие этой клавиши циклически изменяет количество знаков «$», изменяя форму ссылки на столбец и строку отдельно.

На рисунке 16 слева показана таблица коэффициентов Стьюдента, рассчитанная через функцию СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х, краткое описание которой показано справа (поскольку это функция, обратная распределению Стьюдента, то «вероятность» в введенных ранее терминах означает уровень значимости). Активная ячейка С7 содержит формулу со ссылками на верхнюю строку (знак «$» фиксирует 3 строку в первом аргументе функции) и крайний левый столбец (знак «$» фиксирует букву столбца во втором аргументе функции) таблицы. Введя такую формулу в ячейку В4, ее можно «растянуть» на любые значения коэффициентов альфа и числа степеней свободы n-1, указанных в верхней строке и левом столбце.

Расчет случайных погрешностей измерений, округление результатов

Результаты серии измерений удобно занести в таблицу и сохранить в виде столбцов чисел (разделитель дробной части – запятая). Желательно в верхней строке подписать название измеряемой физической величины и указать ее размерность, как показано на рисунке 17, где приведен фрагмент расчета случайной погрешности 5-ти измерений отклонения пластины d при массе груза 50 г.



	A	B	C
1	m, г=	50	
2	**измерения**	**d, мм**	
3	1	0,31	
4	2	0,32	
5	3	0,27	
6	4	0,33	
7	5	0,24	формулы столбца В (знак "=" перед формулой опущен)
8	**расчет,** среднее по выборке =	0,2940000	СРЗНАЧ(B3:B7)
9	стандартное отклонение по выборке =	0,0378153	СТАНДОТКЛОН.В(B3:B7)
10	погрешность при уровне значимости 0,05 =	0,0469539	B9*СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;4)/КОРЕНЬ(5)
11	результат с округлением, Δd (мм) =	**0,05**	B10
12	результат с округлением, d (мм) =	**0,29**	B8

Рис. 17 Иллюстрация к проведению расчетов случайной погрешности

Результаты измерений внесены в ячейки 3-7 столбца В (рис. 17). Среднее значение выборки и дисперсия по выборке рассчитаны с использованием стандартных функций.

Результаты представлены в ячейках B8 и B9. Исключительно для иллюстрации синтаксиса использованных функций на рисунке 17 в столбце С выписаны используемые формулы с опущенными знаками равенства. Расчет погрешности (стандартной функции для расчета погрешности по выборке в редакторе нет) проведен по формуле таблицы 3 (строка 3) с использованием стандартной функции для коэффициента Стьюдента (см. ячейки B10, C10).

В ячейках B11 и B12 приведен результат измерения и его погрешность с учетом округления. Погрешность (ячейка B10) содержит первую значащую цифру 4 (4>2), поэтому округляем, оставляя 2 знака после запятой. Для этого, выделив ячейки B11 и B12, нажимаем правую клавишу мыши и в появившемся меню (рис. 18) выбираем «Формат ячеек». В этом меню при нажатой кнопке «Число», выбираем из Числовых форматов «Числовой» и выбираем с помощью стрелок число десятичных знаков 2, затем нажимаем кнопку «ОК». Редактор выполнит округление по общим правилам. В нашем случае результат измерения отклонения пластины можно записать так: $d = 0{,}29 \pm 0{,}05$ мм.

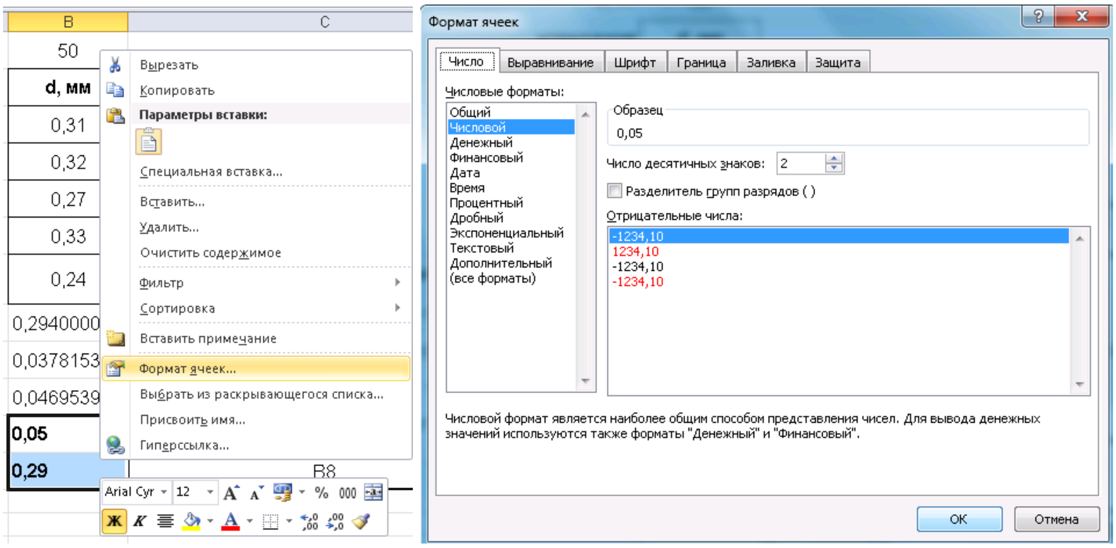


Рис. 18 Иллюстрация к округлению результатов измерения

При необходимости, формулы столбца B (ячейки B8-B12) можно «растянуть» вправо автоматически рассчитав значения и погрешности серии измерений при других условиях, которые введены в соседние столбцы (C, D и т.д.) в строки 3-7. Количество измерений должно совпадать.

Обработка результатов косвенных измерений

Результаты прямых измерений удобно сохранить столбцах таблицы. В соседних столбцах, через использование ссылок автоматически проводим необходимые вычисления косвенной величины. На рисунке 19 показан расчет для лабораторной работы «Модуль Юнга».

B2 fx =(A2+F1)*F2

	A	B	C	D	E	F	G
1	m, г	P=(m+mрам)*g, мН	d, мм		mрам=	10,84	г
2	50	596,8404	0,294		g=	9,81	м/с2
3	60	694,9404	0,335				
4	70	793,0404	0,375				
5	80	891,1404	0,439				
6	90	989,2404	0,472				
7	100	1087,3404	0,525				
8	110	1185,4404	0,562				
9	120	1283,5404	0,622				
10	130	1381,6404	0,669				
11	140	1479,7404	0,721				
12	150	1577,8404	0,763				

Рис. 19 Иллюстрация к вычислению значений косвенных измерений

В строке формул показано содержимое активной ячейки B2 – это формула для расчета веса грузиков и рамки (P). Обратите внимание, ссылка на соседний столбец (ячейка A2) – относительная, ссылки на значения массы рамки (ячейка F1) и ускорения свободного падения (ячейка F2) – прямая. При копировании (растягивании) этой формулы на строки 3-12 подставляются соответствующие значения массы грузов из столбца A: A3, A4, .. A12, а значения прямых ссылок не изменяются.

Построение графиков, линии тренда

Для графического представления результатов измерения, как функциональной зависимости двух переменных, используется точечная диаграмма. Для ее построения необходимо выделить столбцы значений абсцисс (Ox) и ординат (Oy), как показано на рисунке 20. Затем выбрать вкладку «Вставить» и в появившемся меню с картинками типов диаграмм выбрать «Точечная» и один из видов, например «Без соединения точек» (верхняя левая картинка всплывающего окна). Следует иметь в виду, что диаграмма «График», название которой привлекательно, строит зависимость данных от номера строки или столбца и поэтому не подходит для построения графиков зависимости одной величины от другой. Диаграмма может быть вставлена на рабочий лист или на отдельный лист. Первый вариант предпочтительнее, т.к. изменение числовых данных приведет к перестроению диаграммы, что удобно для анализа и выявления ошибок или опечаток.

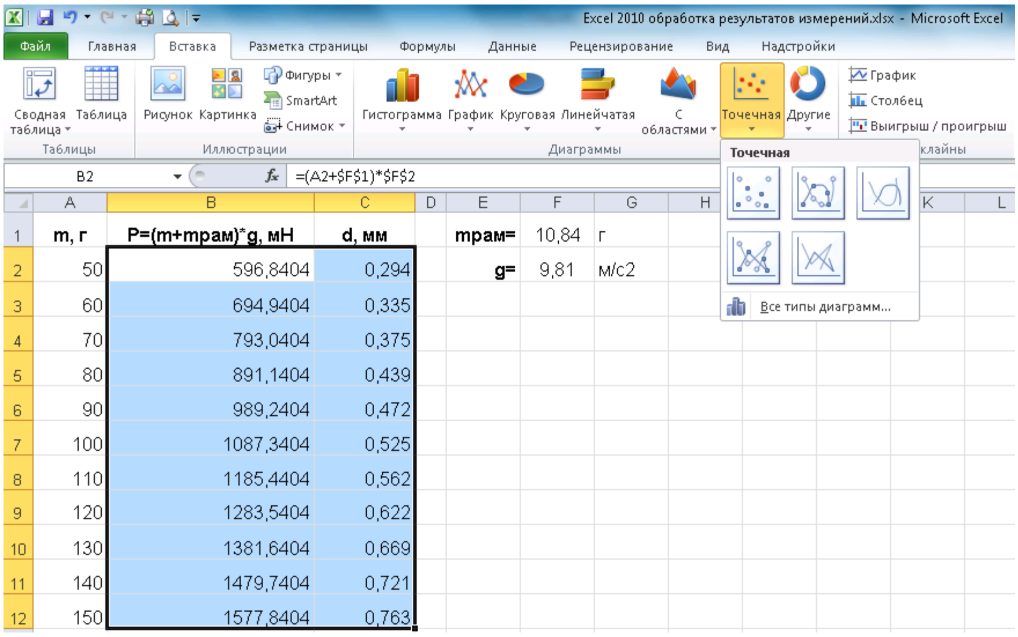


Рис. 20 Иллюстрация к вызову Мастера диаграмм

Вставленная на рабочем листе диаграмма показана на рисунке 21. При необходимости, продолжить оформление графика можно с помощью меню «Работа с диаграммами», которое появляется при выделении диаграммы щелчком мыши.

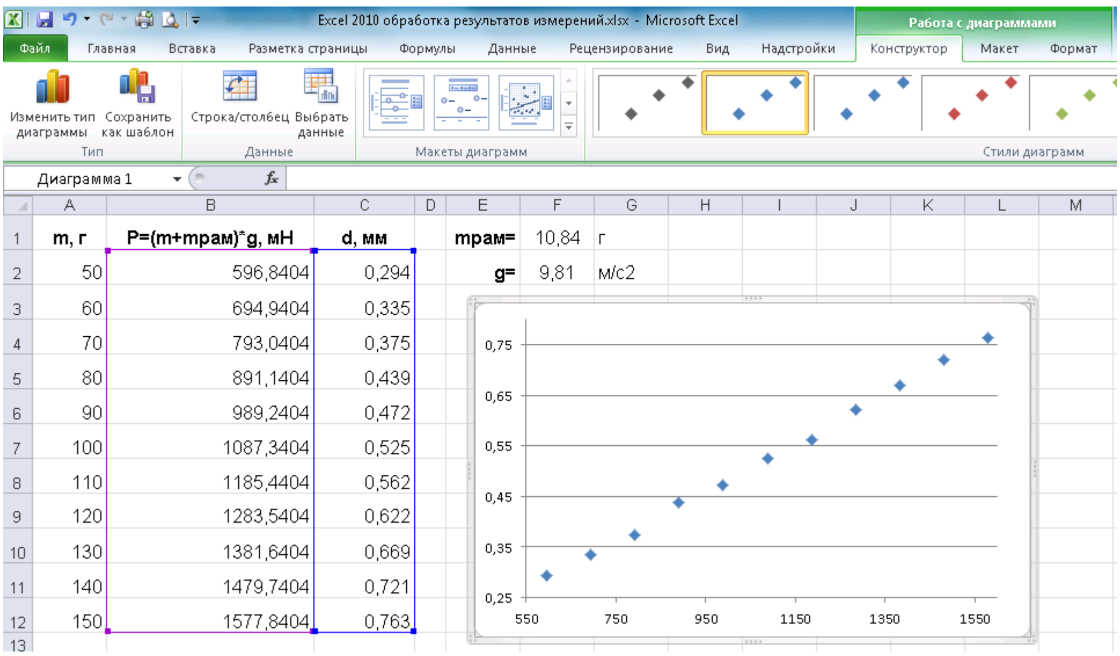


Рис. 21 Иллюстрация к результату построения графика

Для построения линии тренда необходимо выделить одну из точек на графике правой кнопкой мыши и в появившемся списке выбрать «Добавить линию тренда» (рис. 22).

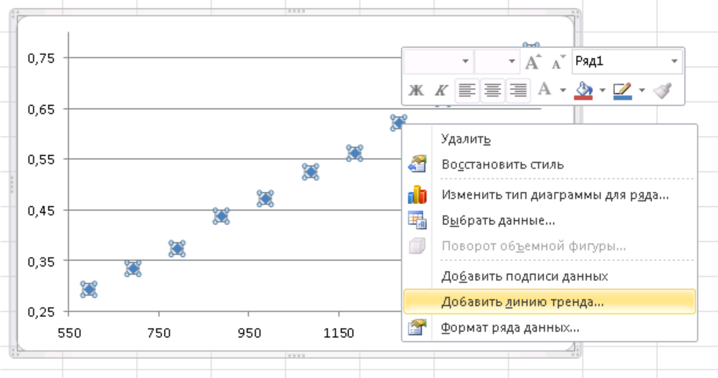


Рис.22 Иллюстрация к построению линии тренда

При этом откроется окно «Формат линии тренда» (рис. 23). В разделе «Параметры линии тренда» можно выбрать «Линейная» зависимость, внизу меню отмечаем галочками «Пересечение с осью Y в точке» 0.0 (т.к. теория предполагает прямую пропорциональность между исследуемыми параметрами), «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R2)» и нажимаем кнопку «Закрыть».

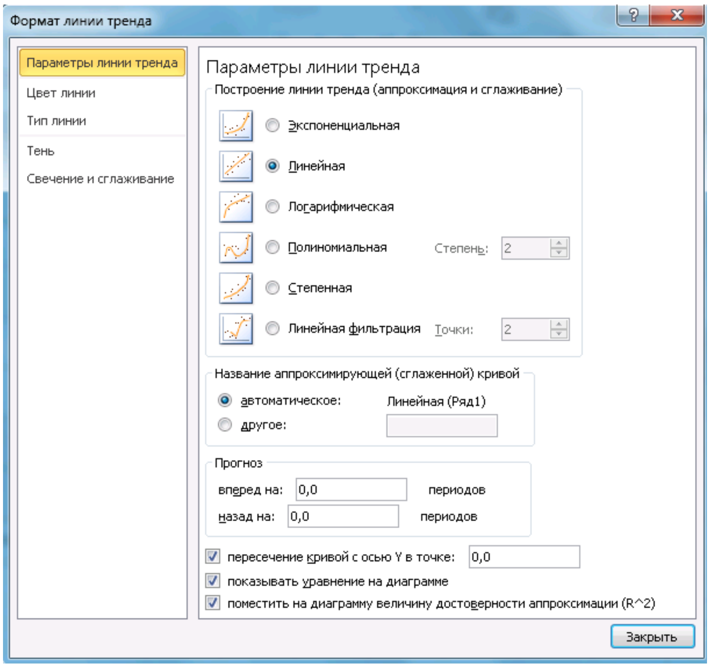


Рис. 23 Иллюстрация к построению линии тренда

В результате, как показано на рисунке 24 на диаграмме отображается линия тренда, ее уравнение и коэффициент детерминации парной линейной регрессии R^2. Сопоставив уравнение линии тренда и рабочую формулу можно рассчитать значение модуля Юнга.

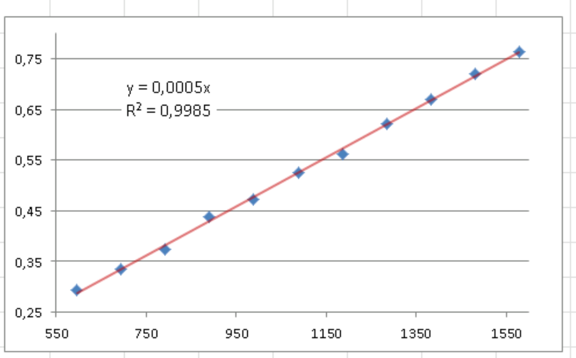


Рис. 24 Иллюстрация к результату построения линии тренда

Построение линейной регрессии

Данные для построения регрессии необходимо сохранить в столбцах, например, как показано на рисунке 26. Активировав меню «Данные» выбрать меню «Анализ данных» и в появившейся вкладке «Анализ данных» среди инструментов анализа найти и выбрать «Регрессия» и нажать кнопку «OK» (рис.25).

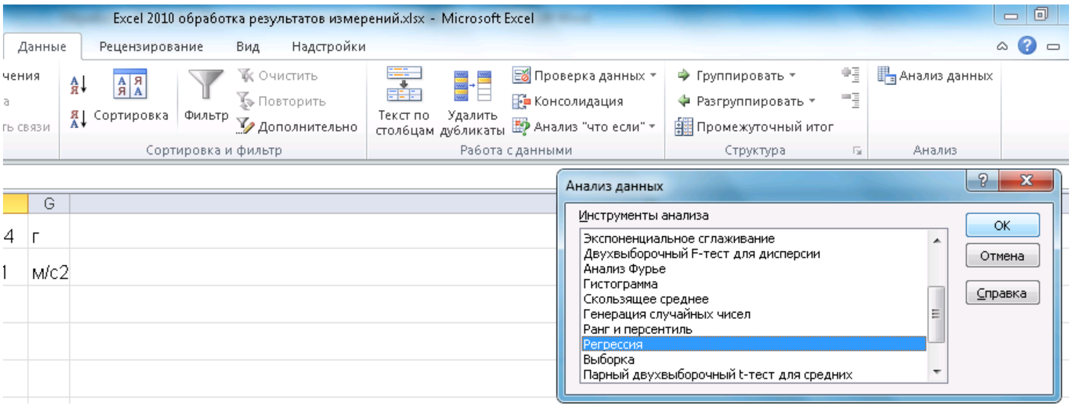


Рис. 25 Иллюстрация к запуску меню Анализ данных

В результате перечисленных действий откроется вкладка «Регрессия», в которой необходимо заполнить несколько полей. Чтобы ввести входной интервал Y нужно щелкнуть по красной стрелке справа от поля для ввода интервала и мышкой выделить входной интервал Y (пунктирная линия на рис. 26), и нажать клавишу «Ввод» («Enter») на клавиатуре, ссылки на ячейки будут заполнены автоматически. Аналогично можно выбрать входной интервал X – это ячейки столбца B. Уровень надежности P, связанный с уровнем значимости α: $P = (1-\alpha)\cdot 100$ выставляется в процентах. В качестве «Параметров вывода» можно указать одну из ячеек текущего листа, не содержащую данных справа и снизу – это будет ячейка начала таблицы вывода результатов. После заполнения вкладки необходимо нажать кнопку «OK».

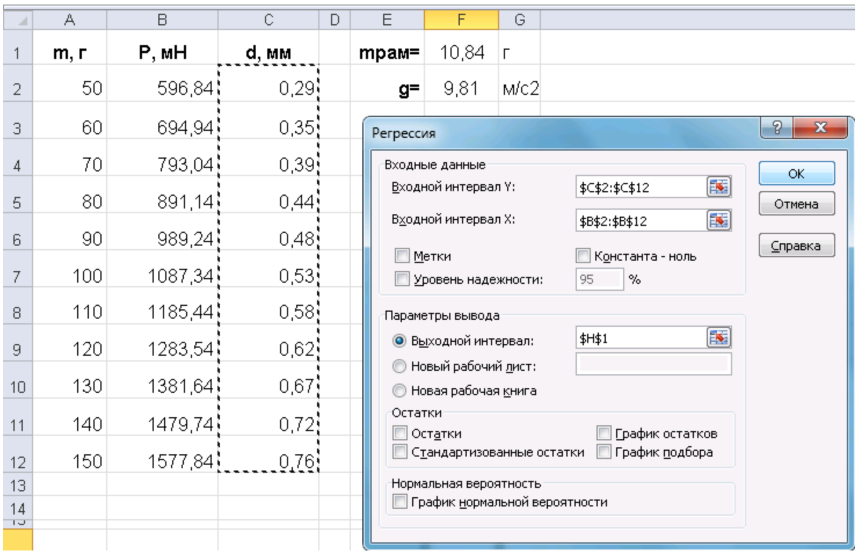


Рис.26 Иллюстрация к построению линейной регрессии

Результаты расчета по линейной регрессии выводятся на рабочий лист в форме таблицы, как показано на рисунке 27. Прежде всего, обратим внимание на значение коэффициента детерминации – вторая строка Регрессионной статистики. В приведенном примере он достаточно близок к 1, чтобы модель линейной регрессии $y = k \cdot x + b$ считать подходящей для введенных значений измерений. Параметры модели приведены в двух нижних строках вывода итогов. «Y-пересечение» – это параметр b, «Переменная X 1» – это коэффициент при переменной (параметр k). Значение этих параметров указано во втором столбце, который называется «Коэффициенты». Здесь же выделены рамкой верхняя и нижняя границы интервала, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение параметра.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,999675272
R-квадрат	**0,999350649**
Нормированный R-к	0,999278499
Стандартная ошибк	0,004156047
Наблюдения	11

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	1	0,239244545	0,239244545	13851	1,17233E-15
Остаток	9	0,000155455	1,72727E-05		
Итого	10	0,2394			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	0,013082545	0,004567443	2,864303895	0,018649066	0,002750271	0,02341482
Переменная X 1	0,000475396	4,03938E-06	117,6902715	1,17233E-15	0,000466258	0,000484534

Рис. 27 Иллюстрация к выводу итогов по линейной регрессии

Для приведения этих результатов к привычному и удобному виду, как показано на рисунке 28, умножим все параметры на тысячу и добавим приставку мили (м) к названиям параметров (Ячейки J20 и J21 показывают значения, в ячейки K20 и K21 переписаны формулы без знака «=» для пояснения). Как полуразность верхней и нижней границ вычислим абсолютную погрешность оценки параметров, которую также умножим на тысячу. Результат показан в ячейках M20 и M21 (ячейки N20 и N21 содержат формулы без знака «=» для пояснения). Обратим внимание, что параметр b имеет погрешность (10), сравнимую с самим значением (13). Учитывая, что теория предполагает $b = 0$, сдвиг линии тренда можно объяснить погрешностью при определении массы рамки без груза (mрам – ячейка F1 в таблице рис. 21) и опустить. Значение коэффициента k и его погрешность округлим по правилам (до третьего знака, ячейки J23 и M23) и выпишем результат с учетом размерности: $k = d/P = (475 \pm 9) \cdot 10^{-6}$ Н/м. Для вычисления модуля Юнга необходимо сопоставить полученный результат с рабочей формулой и провести окончательные вычисления, которые здесь опущены.

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
Y-пересечение	0,013082545	0,004567443	2,864303895	0,018649066	0,002750271	0,02341482
Переменная X 1	0,000475396	4,03938E-06	117,6902715	1,17233E-15	0,000466258	0,000484534
	мb =	**13,0825455**	I17*1000	**мΔb =**	**10,3322744**	1000*(N17-M17)/2
	мk =	**0,47539616**	I18*1000	**мΔk =**	**0,00913772**	1000*(N18-M18)/2
	мk =	**0,475**		**мΔk =**	**0,009**	

Рис. 28 Иллюстрация к анализу функциональной зависимости

Технологии LibreOffice Calc

Табличный процессор LibreOffice Calc (далее: «редактор») позволяет сохранять данные в форме таблиц, численно преобразовывать данные, строить графики и определять линии тренда. На рисунке 29 показано окно редактора для демонстрации основных возможностей, связанных с введением чисел и использованием функций.

Каждая ячейка таблицы имеет имя: это латинская буква столбца и номер строки. На рисунке 29 выделена верхняя ячейка C8. Она активна для редактирования, номер строки и буква столбца автоматически выделяются оранжевой заливкой. Содержимое активной ячейки выносится в строку над таблицей, называемой строкой формул. Обратите внимание, содержимое и значение ячейки могут не совпадать. В нашем случае содержимое ячейки – это формула, значение – число. Введение формулы в ячейке начинается со знака «=». Далее используются общепринятые математические символы для арифметических действий: «+», «–», «*», «/» и множество стандартных функций, подсказка по которым (Мастер функций на рис. 30) появляется при нажатии на справку функций «fx», находящуюся слева от строки формул.

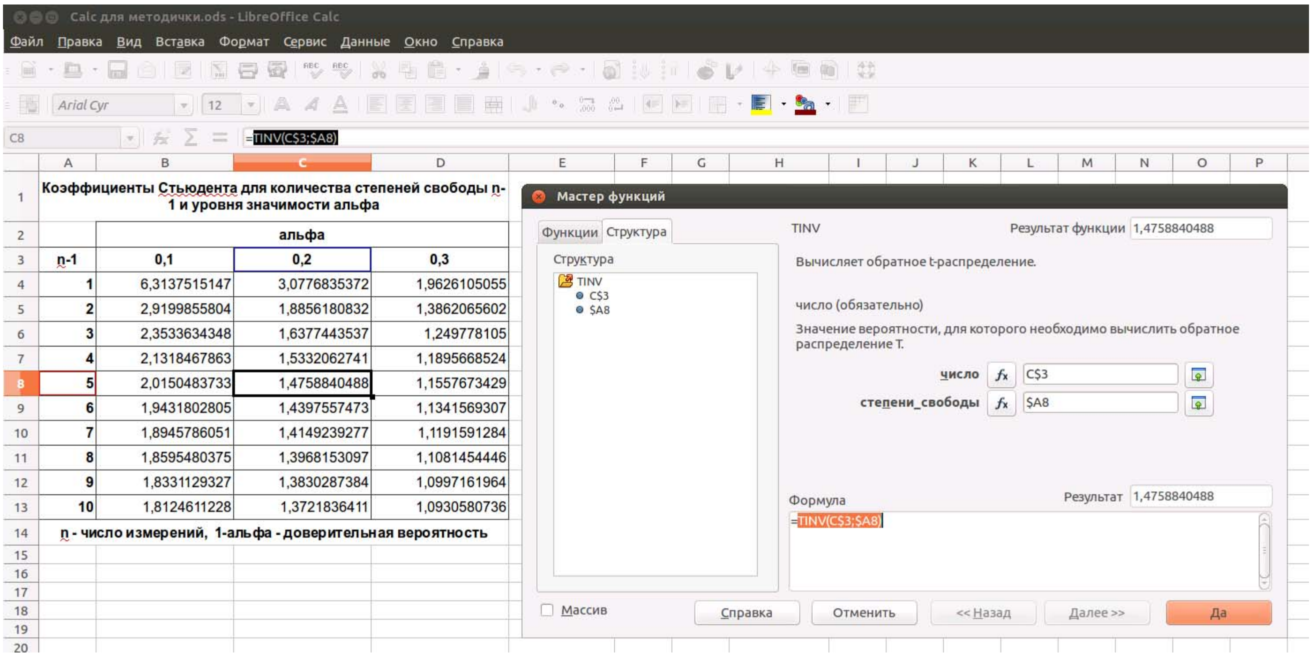


Рис. 29 Иллюстрация к способам ссылок и вызову Мастера функций

Для автоматизации вычислений используют ссылки на ячейки, которые могут быть прямыми и относительными. Относительная ссылка – это имя ячейки (например, A1): при копировании или переносе ячейки с формулой на соседние она будет изменяться, сохраняя положение в таблице относительно ячейки с формулой. Прямая ссылка – имя ячейки со знаком или знаками доллара $ (например, A1), такая ссылка не изменяется при копировании или переносе формулы.

На рисунке 29 слева показана таблица коэффициентов Стьюдента, рассчитанная через функцию TINV, описание которой показано справа. Активная ячейка C8 содержит формулу со ссылками на верхнюю строку (знак «$» фиксирует 3 строку в первом аргументе функции) и крайний левый столбец (знак «$» фиксирует букву столбца во втором аргументе функции) таблицы. Введя такую формулу в ячейку B4, ее можно «растянуть» на любые значения коэффициентов альфа и числа степеней свободы n-1, указанных в верхней строке и левом столбце.

Расчет случайных погрешностей измерений, округление результатов

Результаты серии измерений удобно занести в таблицу и сохранить в виде столбцов чисел (по умолчанию разделитель дробной части при русскоязычной раскладке клавиатуры – запятая). Желательно в верхней строке подписать название измеряемой физической величины и указать ее размерность, как показано на рисунке 30, где приведен фрагмент расчета случайной погрешности 5-ти измерений отклонения пластины d при массе груза 50 г.

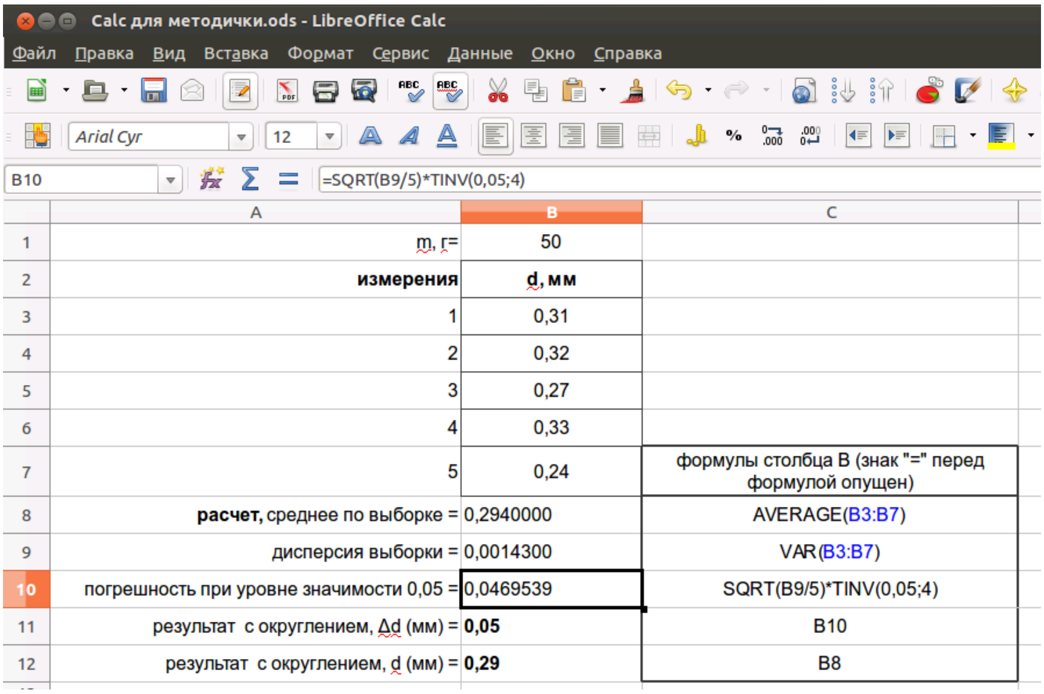


Рис. 30 Иллюстрация к проведению расчета случайной погрешности

Результаты измерений внесены в ячейки 3-7 столбца B (рис.30). Среднее значение выборки и дисперсия по выборке рассчитаны с использованием стандартных функций. Результаты представлены в ячейках B8 и B9. Исключительно для иллюстрации синтаксиса использованных функций на рисунке 30 в столбце C выписаны используемые формулы с опущенными знаками равенства. Расчет погрешности (стандартной функции для расчета погрешности по выборке в редакторе нет) проведен по формуле таблицы 3 (строка 3) с использованием стандартной функции для коэффициента Стьюдента (ячейки B10, C10).

В ячейках B11 и B12 приведен результат измерения и его погрешность с учетом округления. Погрешность (ячейка B10) содержит первую значащую цифру 4 (4>2), поэтому округляем, оставляя 2 знака после запятой. Для этого, выделив ячейки B11 и B12, нажимаем правую клавишу мыши и в появившемся меню (рис. 31) выбираем «Формат ячеек…». В открывшемся меню (рис. 32) при нажатой кнопке «Числа», выбираем в разделе «Категория» вариант «Числовой» и в разделе «Параметры» выставляем с помощью стрелок число десятичных знаков 2. Редактор выполнит округление по общим правилам. В нашем случае результат измерения отклонения пластины можно записать так: $d = 0{,}29 \pm 0{,}05$ мм.

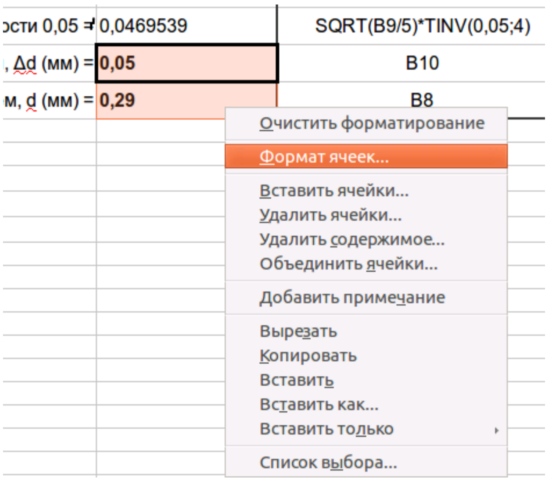


Рис. 31 Иллюстрация к выбору числового формата ячейки

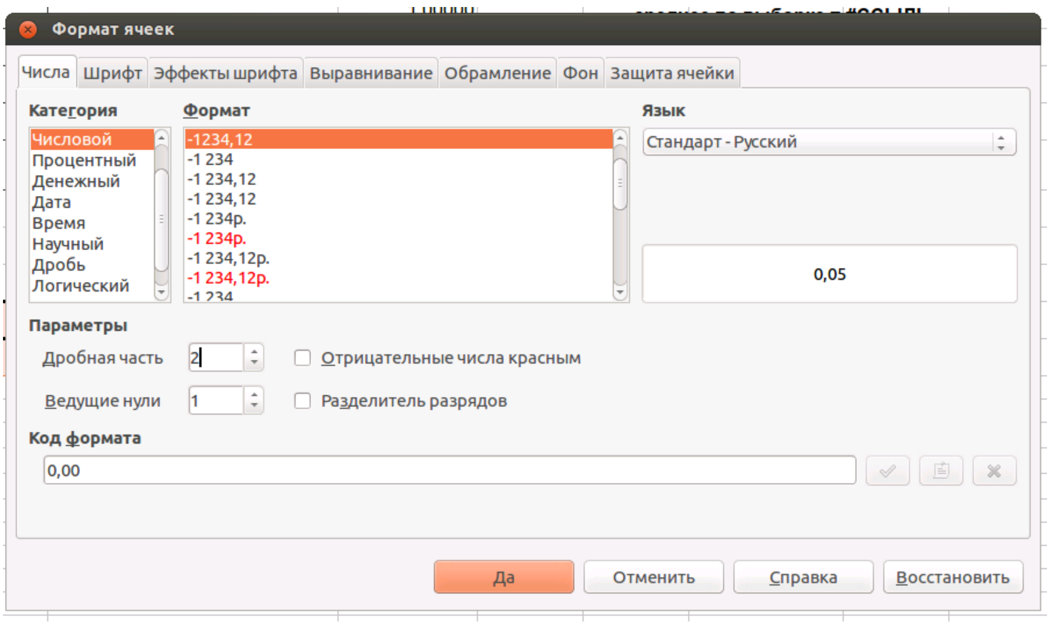
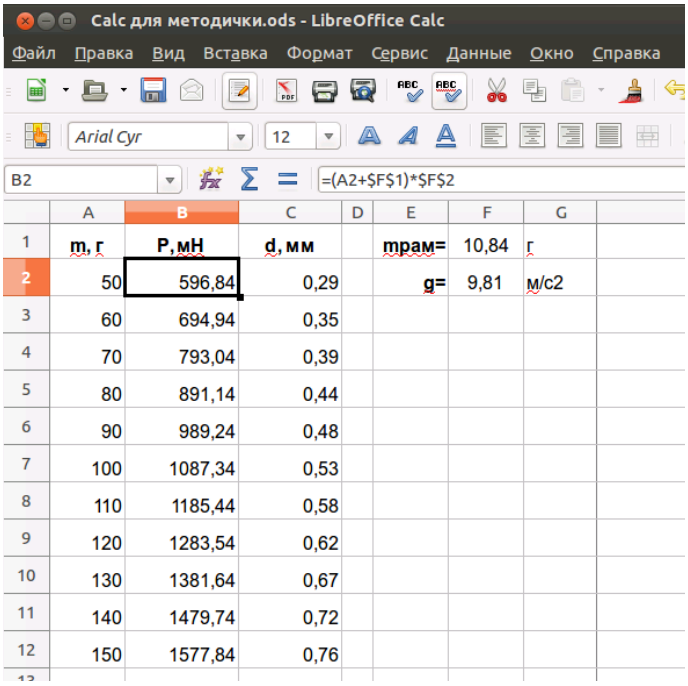


Рис. 32 Иллюстрация к выбору числового формата ячейки

При необходимости, формулы столбца B (ячейки B8-B12) можно «растянуть» вправо автоматически рассчитав значения и погрешности серии измерений при других условиях, которые введены в соседние столбцы (C, D и т.д.) в строки 3-7. Количество измерений при этом должно совпадать.

Обработка результатов косвенных измерений

Результаты прямых измерений удобно сохранить столбцах таблицы. В соседних столбцах, через использование ссылок автоматически проводим необходимые вычисления косвенной величины. На рисунке 33 показан расчет для лабораторной работы «Модуль Юнга».



	A	B	C	D	E	F	G
1	m, г	P, мН	d, мм		mрам=	10,84	г
2	50	596,84	0,29		g=	9,81	м/с2
3	60	694,94	0,35				
4	70	793,04	0,39				
5	80	891,14	0,44				
6	90	989,24	0,48				
7	100	1087,34	0,53				
8	110	1185,44	0,58				
9	120	1283,54	0,62				
10	130	1381,64	0,67				
11	140	1479,74	0,72				
12	150	1577,84	0,76				

Рис. 34 Иллюстрация к вычислению значений косвенных измерений

В строке формул показано содержимое активной ячейки B2 – это формула для расчета веса грузиков и рамки (P). Обратите внимание, ссылка на соседний столбец (ячейка A2) – относительная, ссылки на значения массы рамки (ячейка F1) и ускорения свободного падения (ячейка F2) – прямая. При копировании (растягивании) этой формулы на строки 3-12 подставляются соответствующие значения массы грузов из столбца A: A3, A4, .. A12, а значения прямых ссылок не изменяются.

Построение графиков, линии тренда

Для графического представления результатов измерения используется меню «Диаграмма», значок которой в форме красно-зеленой круговой диаграммы расположен в верхней строчке меню. При подведении курсора к значку появляется контекстная подсказка на черном фоне «Диаграмма» (рис. 34)

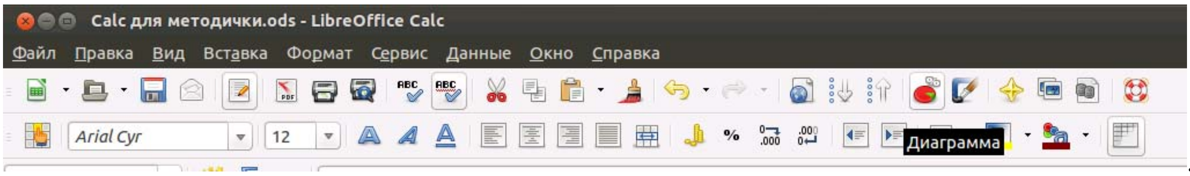


Рис. 34 Иллюстрация к построению диаграмм

Если выделив данные (на рис. 35 это 2 столбца B и C), на основе которых необходимо построить график, нажать левой клавишей мыши на значок «Диаграмма», то будет открыт «Мастер диаграмм» и предварительно построенная диаграмма. Для построения графика необходимо выбрать тип диаграммы «Диаграмма XY» и далее по картинкам «Только точки» (или любую другу форму из показанных на рисунке 35) и завершить выбор параметров графика кнопкой «Готово». Окно Мастера диаграмм будет закрыто. График будет размещен на рабочем листе редактора.

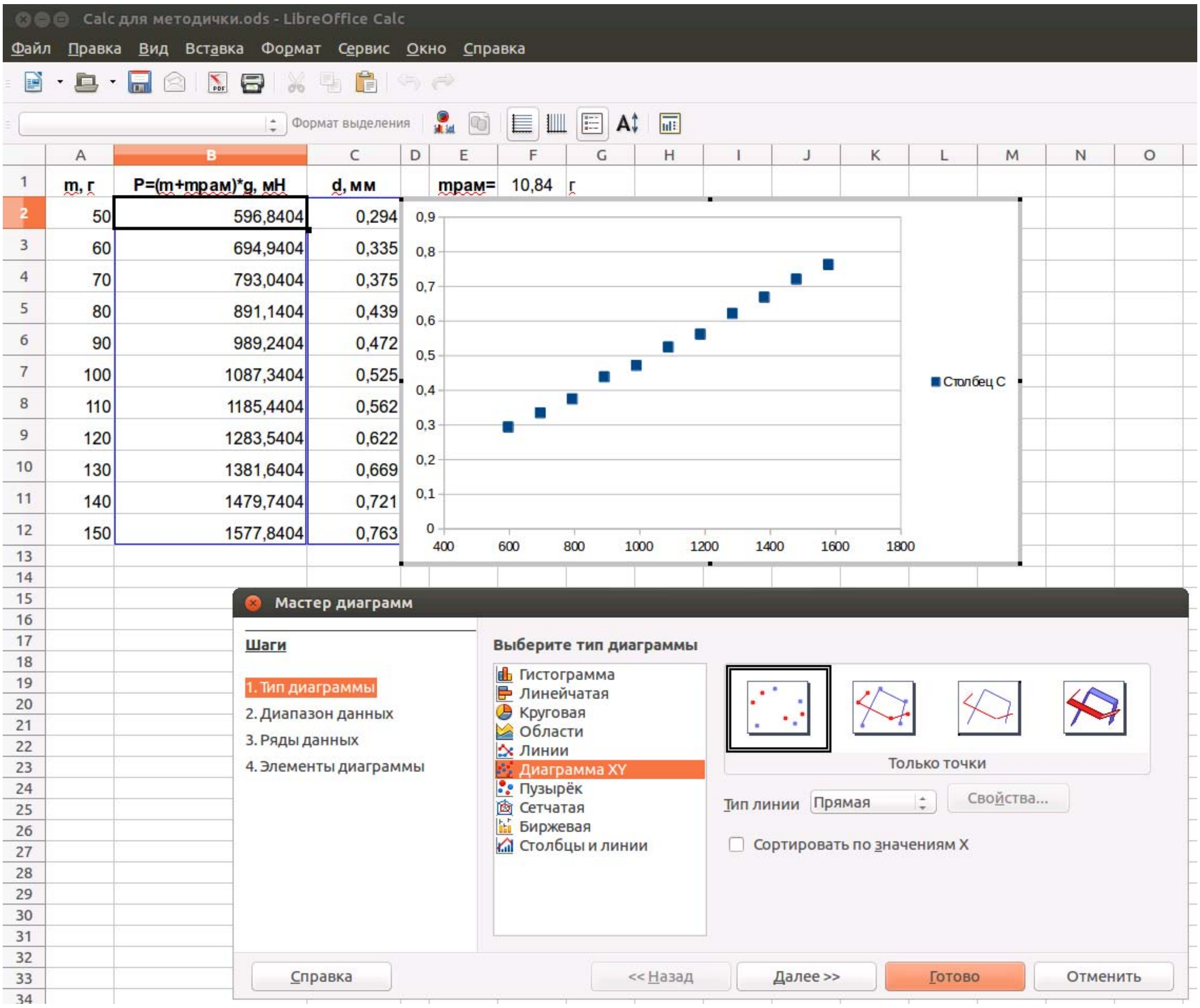


Рис. 35 Иллюстрация к построению графика

При необходимости выделяя правой кнопкой мыши оси координат или точки графика можно внести изменения в дизайн диаграммы. Всплывающее меню, показанное на рисунке 36, появится на диаграмме, если щелкнуть правой кнопкой мыши по одной из точек построенного графика. Обратите снимание на строчку меню, содержащее функцию «Вставить линю тренда…».

В результате, как показано на рисунке 36 справа на графике отображается линия тренда, ее уравнение и коэффициент детерминации парной линейной регрессии R^2. Сопоставив уравнение линии тренда и рабочую формулу можно рассчитать значение модуля Юнга.

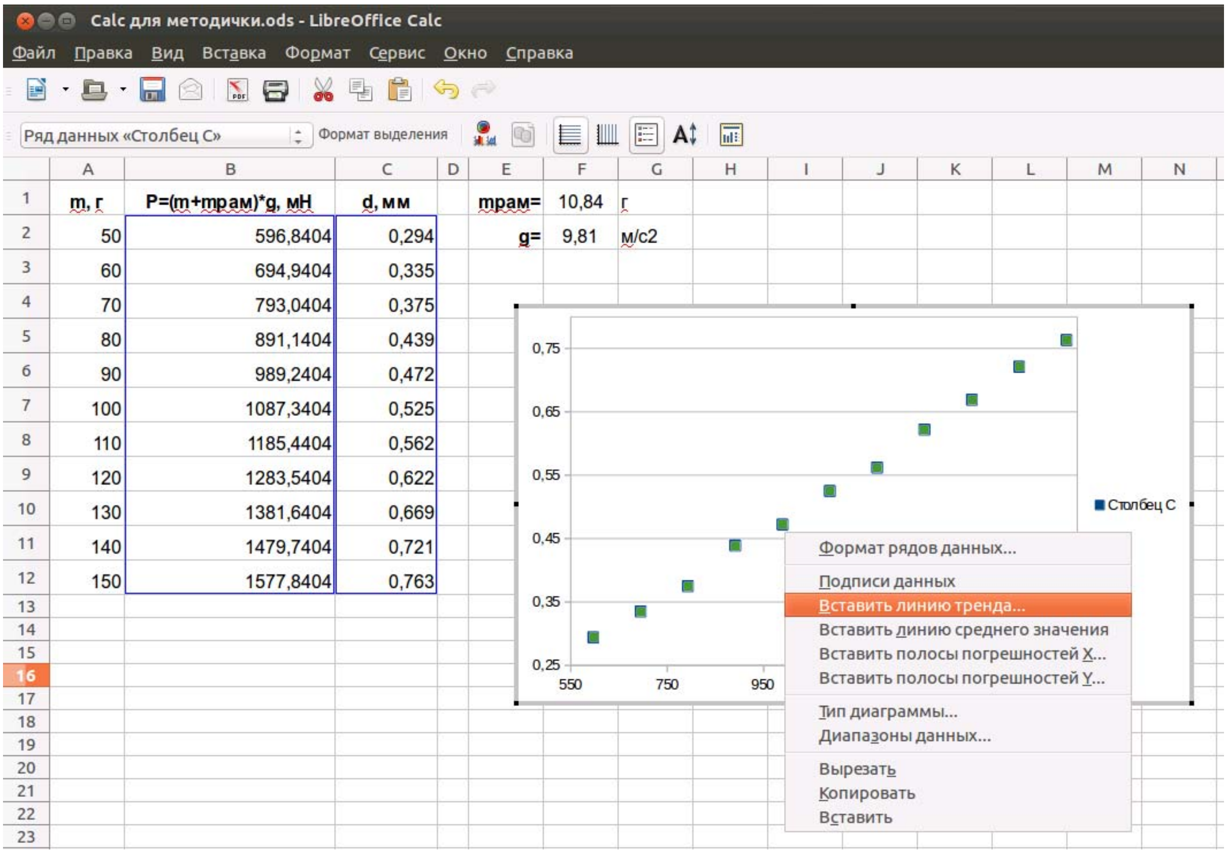


Рис. 35 Иллюстрация к построению графиков и линии тренда

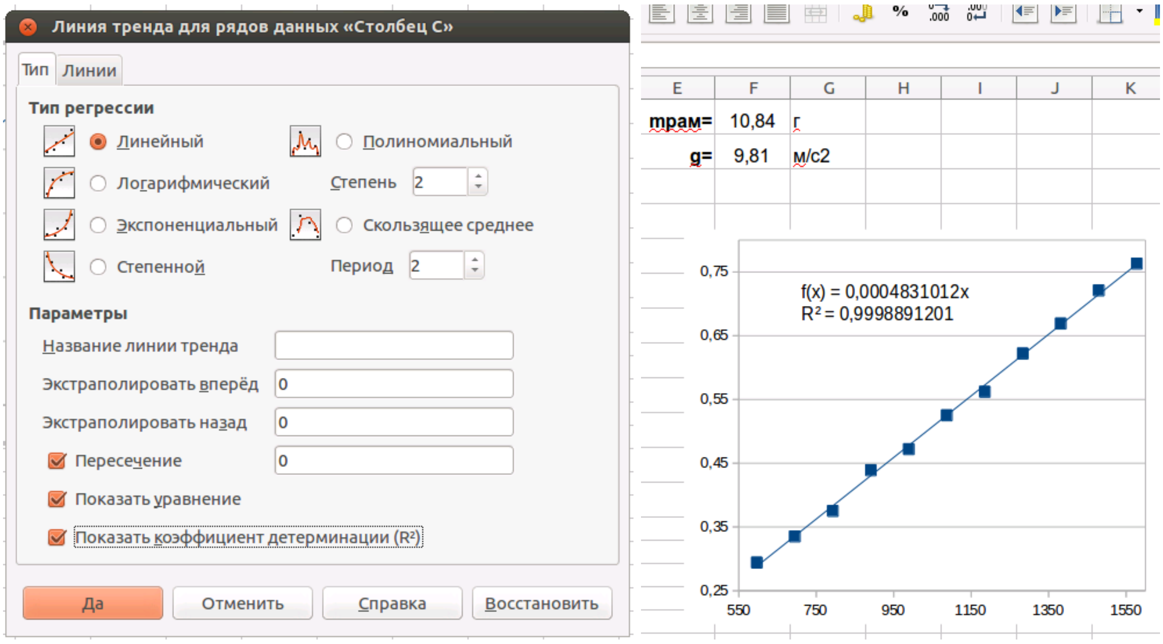


Рис. 36 Иллюстрация к меню построения линии тренда

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Митин, И. В. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов / И. В. Митин, В. С. Русаков. – Изд. 2-е. – Москва : Физический факультет МГУ, 2004. – 44 с.
2. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология. Ч. I. Общая теория измерений : учебник для вузов. – 4-е изд. , испр. – Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2010. – 192 с.
3. Кравченко, Н. С. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме : учебное пособие / Н. С. Кравченко, О. Г. Ревинская ; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 88 с.

Дополнительная литература

4. Надстройка Пакет анализа MS Excel [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://excel2.ru/articles/nadstroyka-paket-analiza-ms-excel (дата обращения : 17.06.2018)
5. Хахаев, И. Редактор электронных таблиц LibreOffice Calc [Электронный ресурс] / И. Хахаев . – Режим доступа: http://ikh1.narod.ru/pub/part-02-lo52.pdf (дата обращения : 17.06.2018)

Учебно-методическое издание

Юлия Вячеславовна Богданова

Физика: обработка результатов измерений

учебно-методическое пособие

Технический редактор:
Ответственный за выпуск:

Подписано в печать: Сдано в печать: Формат: Гарнитура: Тираж	Печать: Бумага: Уч.-изд.л: Усл. печ. л.: Заказ:

Издательство Томского государственного
Педагогического университета
Отпечатано в типографии ТГПУ
643041, Томск, ул. Герцена, 49. Тел. (3822) 52-12-93.